

Die experimentelle Bestimmung des Wirkungsquerschnitts
für $\pi\pi$ -Streuung als Funktion der Energie und weitere
Ergebnisse zur $\pi\pi$ -Wechselwirkung aus der Pion-Erzeugung
im Pion-Nukleon-Stoß

Norbert Schmitz

1961

Die experimentelle Bestimmung des Wirkungsquerschnitts
für $\pi\pi$ -Streuung als Funktion der Energie und weitere
Ergebnisse zur $\pi\pi$ -Wechselwirkung aus der Pion-Erzeugung
im Pion-Nukleon-Stoß

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der

Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt
von

Norbert Schmitz

München, April 1961



Berichterstatter: Prof. Dr. W. Heisenberg

Tag der mündlichen Prüfung: 21.6.1961



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555620_0042

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

I. Der π -Mesonen-Strahl

- A. Einleitung
- B. Quadrupollinsen und Ablenkmagnete
- C. Beschreibung des gesamten π^- -Strahls

II. Theorie zur Bestimmung des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts

- A. Einleitung
- B. Quantitative Beschreibung der Chew-Low-Methode; Kinematik
- C. Herleitung der Formel des Ein-Pion-Austauschs
- D. Andere Erzeugungsmechanismen und Extrapolationsmethode

III. Auswertung der Blaskammerfilme

- A. Durchmusterung der Filme
- B. Ausmessung eines Ereignisses
- C. Unterscheidung zwischen elastischen und unelastischen Ereignissen
- D. Berechnung des Korrekturfaktors
- E. Zusammenstellung der Meßwerte
- F. Verfolgte Spurlänge

IV. Auswertung und Diskussion der Ergebnisse

- A. Durchführung der Extrapolation und Ergebnisse für $\sigma_{\pi-\pi^0}$
- B. Vergleich der Ergebnisse mit den bisherigen theoretischen Ergebnissen zur $\pi\pi$ -Wechselwirkung
- C. Beurteilung der bisher gemachten Näherungen
- D. Diskussion der experimentellen ω^2 -Verteilung

Zusammenfassung

Danksagung

Literaturverzeichnis

Anhang

Lebenslauf

Einleitung

Da die Pionen instabile Teilchen sind, kann der Wirkungsquerschnitt für Pion-Pion-Streuung nicht direkt in einem Streuexperiment gemessen werden, während er andererseits von großem theoretischen Interesse ist. Chew und Low¹ haben eine Methode angegeben, den $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt indirekt aus der $\pi\pi$ -Erzeugung im Pion-Nukleon-Stoß zu bestimmen. Diese Arbeit berichtet über die Durchführung und die Ergebnisse dieses Experiments. Es wurden für die Arbeit Bilder benutzt, die an der großen 72-Zoll-Wasserstoff-Blasenammer der Alvarez-Gruppe in Berkeley aufgenommen wurden. In die Blasenammer wurde ein Strahl negativer π^- -Mesonen aus dem Bevatron mit einem Impuls von $1,03 \frac{\text{GeV}}{c}$ geschossen.

Im ersten Teil (I.) der Arbeit wird über den Aufbau und die optischen Eigenschaften des 71 m langen Teilchenstrahls zwischen Bevatron und Blasenammer und über Berechnungen und Messungen zu einzelnen apparativen Bestandteilen des Strahls berichtet. Im zweiten Teil (II.) wird die Chew-Low-Methode dargelegt und theoretisch begründet. Es werden ausführliche Überlegungen darüber angestellt, wie die Extrapolation in praxi durchzuführen ist und welche Schwierigkeiten dabei auftreten können. Der dritte Teil (III.) befaßt sich mit der Auswahl, Ausmessung und Auswertung der Ereignisse in den Blasenammerfilmen und der Zusammenstellung der experimentellen Statistik. Im letzten Teil (IV.) der Arbeit werden aus den experimentellen Daten die Werte für den $\pi\pi^0$ -Wirkungsquerschnitt durch Extrapolation bestimmt; diese werden mit theoretischen Voraussagen verglichen. Anhand des gewonnenen experimentellen Materials werden bisher gemachte Näherungen und die Möglichkeit einer $\pi\pi$ -Resonanz diskutiert.

I. Der π -Mesonen-Strahl⁺⁾

A. Einleitung

Die Aufgabe, einen Teilchenstrahl herzustellen, besteht darin, aus der Vielzahl der am Target im Bevatron erzeugten Elementarteilchen mit allen möglichen Richtungen und Impulsen eine bestimmte Teilchenart, z.B. negative Pionen, mit einem bestimmten Impuls auszusondern und diese über einen größeren Abstand mit einer bestimmten Richtung und einem bestimmten Querschnitt des Strahlenbündels in die Blasen-kammer zu lenken. Diese Aufgabe wird verwirklicht mit Hilfe von Ablenk-magneten (zur Impulstrennung und Richtungsänderung), magnetischen Quadrupollinsen (zur Fokussierung), Spektrometern (zur Massentrennung), Schlitzen und Kollimatoren, Vakuumrohren (zur Vermeidung von Vielfachstreuung) und anderen Apparaturen. Wegen der Größe und Kompliziertheit der apparativen Anordnung können die umfangreichen Berechnungen, Ausmessungen, der Aufbau und die Einjustierung des Teilchenstrahl verständlicherweise nur in Zusammenarbeit von mehreren Physikern und Technikern durchgeführt werden. Der hier beschriebene Teilchenstrahl wurde von Mitgliedern der Alvarez-Gruppe, Berkeley, zu denen auch der Verfasser dieser Arbeit gehörte, unter Leitung von Dr. P. S. Crawford aufgebaut. (Die aufgenommenen Filme wurden natürlich nicht nur für das vom Verfasser durchgeführte, in dieser Arbeit beschriebene Experiment zur $\pi\pi$ -Wechselwirkung, sondern zur Behandlung vieler weiteren Fragen der Elementarteilchenphysik benutzt.) Es kann im Rahmen dieser Arbeit wegen des großen Umfangs bei weitem nicht auf alle Einzelheiten und Probleme des Teilchenstrahls eingegangen werden. Daher soll nur eine relativ kurze Beschreibung des gesamten Strahls gegeben und nur diejenigen apparativen Elemente und Fragen eingehender behandelt werden, deren Berechnung, Ausmessung und Behandlung vom Verfasser dieser Arbeit durchgeführt wurden, bzw. an denen er maßgeblich beteiligt war. Eine ausführliche Liste von Literatur möge ein Ausgleich sein für die Knappheit der Darstellung, in der Formeln oft nur genannt, aber nicht hergeleitet werden. (Siehe² wegen einer guten zusammenfassenden Darstellung über die Optik von Teilchenstrahlen mit viel Literatur.)

+) Mit "Strahl" sollen in diesem Abschnitt nicht nur die vom Bevatron zur Blasen-kammer fliegenden Teilchen selbst, sondern auch die Gesamtheit des apparativen Aufbaus bezeichnet werden, durch den die Teilchen ausgesondert und in die Blasen-kammer geleitet werden.

Zunächst soll auf die wichtigsten apparitiven Bestandteile des Strahls, die magnetischen Linsen und Ablenkmagnete, näher eingegangen werden.

B. Quadrupollinsen und Ablenkmagnete

1. Matrix-Methode für Linsen²⁻⁴

Im folgenden soll die optische Achse des Systems in x-Richtung verlaufen und die beiden zu ihr senkrechten Richtungen durch die y-Achse (horizontal) und z-Achse (vertikal) gegeben sein. In der horizontalen Ebene (z.B.) ist die Bahn $y(x)$ eines Teilchens an der Stelle x_1 gegeben durch den Abstand $y_1 = y(x_1)$ von der Achse und ihre Neigung $y'_1 = y'(x_1)$. Diese beiden Größen können als Komponenten eines Vektors

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$$

auffaßt werden. Die Bahngrößen y_2 und y'_2 des Teilchens an einer späteren Stelle x_2 hängen im allgemeinen linear von den Bahngrößen an der Stelle x_1 ab. In Vektorschreibweise lauten die beiden Linearkombinationen:

$$(1) \quad \vec{y}_2 = M(l) \vec{y}_1,$$

wobei die 2x2 Matrix $M(l)$ abhängt von der Länge $l = x_2 - x_1$ des optischen Systems zwischen den beiden Punkten x_1 und x_2 und natürlich vom optischen System selbst. Zum Beispiel lautet, wie man leicht sieht, die Matrix für eine dünne Linse ($l \rightarrow 0$) der Brennweite f :

$$(2) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

und für ein feldfreies Gebiet der Länge l

$$(3) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Matrix-Multiplikation (sukzessives Anwenden von (1)) kann eine Teilchenbahn durch ein optisches System aus mehreren verschiedenen Komponenten verfolgt werden. (Siehe⁴ wegen Herleitung von Linsenformeln mit der Matrix-Methode.)

2. Magnetische Quadrupollinsen^{2,5-9}

In Abb.1 ist die Vorderansicht eines Quadrupolmagneten (in Richtung der optischen Achse gesehen) schematisch dargestellt. Die zwischen den Polflächen der Eisenkerne verlaufenden Feldlinien sind eingezeichnet;

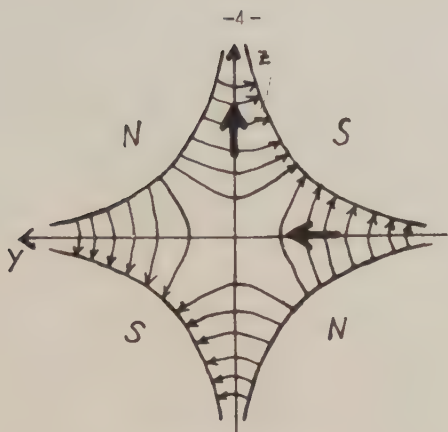


Abb.1: Vorderansicht eines Quadrupol-Feldes

ebenso ist durch zwei dicke Pfeile die Kraft angedeutet, die auf ein in die Zeichenebene fließendes negatives Teilchen in horizontaler (H) und vertikaler (V) Ebene wirkt: In H wirkt der Magnet fokussierend (C für convergent), in V wirkt er defokussierend (D für divergent). Ein Teilchen wird wegen der dichteren Feldlinien umso stärker abgelenkt, je weiter es von der optischen Achse entfernt ist. Durch Hintereinanderschalten von drei Quadrupolen (Quadrupol-Triplett), z.B. in der Schaltungsweise CDC in H und DCD in V, erhält man eine Linse, die z.B. ein parallel eintretendes Strahlenbündel fokussieren kann, wie es in Abb.2 schematisch dargestellt ist. Neben der Triplett gibt es auch die einfacheren Dubletts, auf ihre Nachteile gegenüber der Triplett kann hier nicht eingegangen werden.

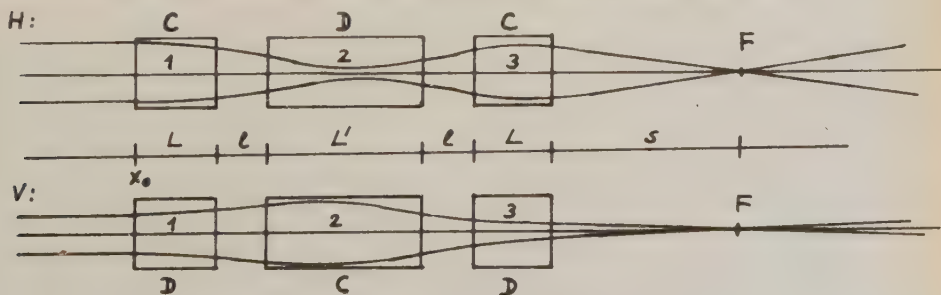


Abb.2: Wirkungsweise eines Quadrupol-Tripletts

Quantitativ ist ein Quadrupol definiert durch das Magnetfeld

$$(4) \quad H_x = 0, \quad H_y = -Kz, \quad H_z = -Ky.$$

Der Betrag des Feldes ist also rotationssymmetrisch um die Achse und nimmt linear mit dem Abstand von der Achse zu. Wie man leicht sieht, läßt sich das durch (4) gerebene Feld durch hyperbelförmige Polflächen mit der y - und z -Achse als Asymptoten verwirklichen. Die Feldlinien sind ebenfalls Abschnitte von Hyperbeln mit den 45° -Geraden als Asymptoten.

Mit Hilfe der bekannten Formel für die Lorentz-Kraft erhält man die Bewegungsgleichung für ein Teilchen des Impulses p im Felde (4) und daraus die Differentialgleichungen für die Bahn $y(x)$, $z(x)$ des Teilchens, wenn man die zusätzliche gute Näherung macht, daß die y - und z -Komponente der Teilchenschwindigkeit klein ist gegen die x -Komponente v (Näherung kleiner Öffnungswinkel):

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -C y, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = C z$$

$$\text{mit } C = \frac{e}{pc} K.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht lösen, und man erhält die beiden Matrizen M_C und M_D für die beiden Ebenen eines Quadrupols der Länge L :

$$(6) \quad M_C(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{L}{\phi} \sin \phi \\ -\frac{\phi}{L} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad M_D(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \frac{L}{\phi} \sinh \phi \\ \frac{\phi}{L} \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \phi = C^{\frac{1}{2}} L = \left(\frac{e}{pc} K \right)^{\frac{1}{2}} L.$$

Als Beispiel einer oft auftretenden Anwendung möge der in Abb. 2 dargestellte Strahlengang mit der Matrix-Methode behandelt werden. (Die beiden Außenmagnete 1 und 3 eines Triplets sind immer gleich gebaut und werden auch vom selben Strom I zur Erzeugung des Feldes durchflossen. Ungestrichene Größen sollen sich im folgenden immer auf die Außenmagnete 1 und 3, gestrichene Größen auf den Mittelmagneten 2 beziehen.) Die beiden Gesamtmatrizen, die die parallele Teilchenbahn an der Eintrittsstelle x_0 in den Quadrupol 1 mit der Bahn am Brennpunkt F verbinden, lauten in den beiden Ebenen (siehe (3) und (6), die Brennpunkte sollen in beiden Ebenen zusammenfallen):

$$(7) \quad M_{CDC}(\phi, \phi') = \begin{pmatrix} a_{CDC} & b_{CDC} \\ c_{CDC} & d_{CDC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_C(\phi) \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_D(\phi') \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_C(\phi),$$

$$M_{DCD}(\phi, \phi') = \begin{pmatrix} a_{DCD} & b_{DCD} \\ c_{DCD} & d_{DCD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_D(\phi) \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_C(\phi') \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_D(\phi).$$

Damit durch die Matrizen M_{CDC} bzw. M_{DCD} parallele Strahlen gebündelt werden, muß für alle y_0 bzw. z_0 gelten (siehe (1)):

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ y'_F \end{pmatrix} = M_{CDC}(\phi, \phi') \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ z'_F \end{pmatrix} = M_{DCD}(\phi, \phi') \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente a_{CDC} und a_{DCD} müssen also verschwinden, und man erhält für gegebene Abstände L, L', l, s durch Ausmultiplizieren von (7) zwei Gleichungen zur Bestimmung von ϕ und ϕ' :

$$(9) \quad a_{CDC}(\phi, \phi') = 0, \quad a_{DCD}(\phi, \phi') = 0.$$

Obwohl dieses sehr komplizierte Gleichungssystem nicht explizit nach ϕ und ϕ' auflösbar ist, könnten ϕ und ϕ' durch numerische Iteration mit Hilfe einer Rechenmaschine bestimmt werden. Mit ϕ und ϕ' sind für festen Teilchenimpuls p über (6) auch die Felderadien K und K' bekannt. Da der Felderadius K eine eindeutige, für nicht zu hohe Feldstärken unterhalb der Sättigung lineare Funktion der Stromstärke I durch die Magnetspulen ist, sind damit die Stromstärken I und I' bekannt, die die in Abb. 2 dargestellte Fokussierung in U bewirken. (Die Kurven $K(I)$ bzw. $K'(I')$ wurden für jeden im Strahl benutzten Quadrupol durch Messung bestimmt.)

In ähnlicher Weise lassen sich die Stromstärken für jeden gewünschten Strahlengang (z.B. astigmatischer Strahlengang, Abbildung eines Punktes in einen Punkt, usw.) rechnerisch bestimmen. Ebenso lassen sich leicht Formeln für die Lage der Hauptebenen aufstellen.

Zum Aufbau des hier behandelten Strahls wurden die Magnetströme, die zur Verwirklichung des geplanten Strahlengangs erforderlich waren, nicht durch Berechnung nach der Matrix-Methode, sondern experimentell nach der Draht-Bahn-Methode (wire-orbit-method) bestimmt. Gegen die Berechnung spricht nicht nur die Kompliziertheit der zu lösenden Gleichungen, sondern auch die Tatsache, daß für die Längen

L, L', l wegen der magnetischen Streufelder Effektivwerte einzusetzen sind, die nicht genau bekannt sind. Mit der Matrix-Methode wurden jedoch Näherungsberechnungen durchgeführt¹⁰, um Auskunft über die ungefähre Größe der Magnetströme zu bekommen:

Faßt man die drei Magnete eines Triplets als dünne Linse auf (d.h. $L \rightarrow 0$ so, daß $CL = \left| \frac{1}{f} \right| = \text{const.}$, ebenso für L'), so nehmen die Matrizen (6) die einfache Form (2) an und die Gleichungen zur Bestimmung der reziproken Brennweiten $\left| \frac{1}{f} \right|$ bzw. $\left| \frac{1}{f'} \right|$ bei parallelem Strahleneintritt und gegebenen Abständen s_{CDC} und s_{DCD} des Brennpunktes vom Magnet in der Ebene H bzw. V (Astigmatismus) sind sehr einfach. Aus $\frac{1}{f}$ und $\frac{1}{f'}$ lassen sich dann wieder leicht über $K(I)$ und $K'(I')$ die Ströme I und I' bestimmen. Mit Hilfe der Rechenmaschine IBM-650 wurde für jede benutzte Quadrupollinse ein Netz aus zwei Kurvenscharen berechnet, in dem die eine Kurvenschar aus Kurven " s_{CDC} gegen s_{DCD} für feste I " und die andere aus Kurven " s_{CDC} gegen s_{DCD} für feste I' " bestand. Aus diesem Diagramm konnten dann durch Interpolation die beiden Magnetströme I und I' abgelesen werden, die zu einem Punkte (s_{CDC}, s_{DCD}) des Diagramms gehörten, d.h. die einen parallelen Strahl an der Stelle s_{CDC} in der einen und an der Stelle s_{DCD} in der anderen Ebene fokussierten. (Normalerweise wird im Strahlengang von einer Linse eine astigmatische Abbildung verlangt.)

Das Diagramm, von dem die schließlich benutzten Ströme I und I' abgelesen wurden, wurde für jede Linse durch Messungen nach der Draht-Bahn-Methode bestimmt. Diese Methode besteht - grob gesprochen - darin, daß ein sehr leichter, flexibler, stromdurchflossener, gespannter Draht, der durch die Quadrupollinse führt, die Form einer Teilchenbahn annimmt. Abb. 3 zeigt die Meßanordnung schematisch.

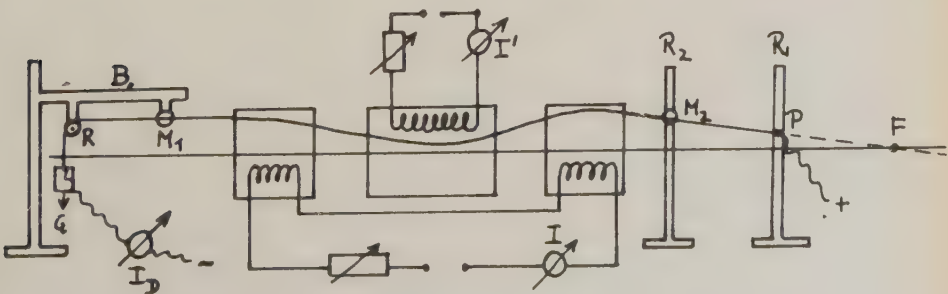


Abb. 3: Die Draht-Bahn-Methode

Der vom Strom I_D durchflossene Draht ist im Punkte P des Rahmens R_1 befestigt und wird durch eine Kraft F über eine Rolle R gespannt. Sonst ist der Draht überall frei. Es läßt sich leicht zeigen², daß der Draht die Form einer Teilchenbahn hat, wobei der Impuls des dargestellten Teilchens gegeben ist durch

$$(10) \quad p = \frac{e}{c} \frac{G}{I_D} .$$

Um die Lage des zu I , I' und p gehörigen Brennpunktes F in der Ebene V zu bestimmen, wird bei fester Einstellung der Rolle R der Spannungspunkt P so lange mit Hilfe einer fein einstellbaren Schraube vertikal verschoben, bis der Draht am Fadenkreuz des Mikroskopes M_1 zu sehen ist, das über den Balken B starr mit R verbunden ist. Bei dieser Einstellung tritt der Draht genau horizontal in die Linse ein. Es wird darauf das Mikroskop M_2 am Rahmen R_2 vertikal verstellt, bis der Draht am Fadenkreuz zu sehen ist. An der Rahmen R_1 und R_2 können dann die vertikalen Koordinaten z_1 und z_2 des Drahtes abgelesen werden. Danach wird der Balken B um einen bestimmten Betrag vertikal verschoben, und der Einstell- und Meßvorgang wiederholt sich, usw. Aus mehreren Wertepaaren (z_1, z_2) wird dann mit Hilfe des Strahlensatzes die Lage des Punktes F graphisch oder rechnerisch bestimmt. (Außerhalb des Magneten verläuft der Draht gerade.) Auch die Lage der Hauptebene läßt sich sofort bestimmen. Diese Meßreihe wird für verschiedene Wertepaare (I, I') für die Magnetströme wiederholt. Ebenfalls wird die Lage des Brennpunktes und der Hauptebene in der Ebene H auf dieselbe Weise für jedes (I, I') bestimmt.

In dieser Weise wurden die im Strahl benutzten Quadrupollinsen ausgemessen. Als Beispiel ist in Abb.4 das gemessene Stromdiagramm eines Triplets gegeben, von dem drei gleiche Exemplare unter drei verschiedenen Bedingungen im Strahl benutzt wurden. Die dargestellten Ergebnisse gelten für Teilchen von $1 \frac{\text{GeV}}{c}$; die Lagen s_{CDC} und s_{DCD} der Brennpunkte sind vom Zentrum des Mittelmagneten aus gemessen.

Mit Hilfe der Linsenformel und der bekannten Lage der Hauptebenen können für jeden anderen Strahlengang (z.B. Abbildung eines Punktes in einen Punkt) die Lage des Brennpunktes und damit die Magnetströme ermittelt werden.

3. Ablenkmagnete²

Bei symmetrischem Strahlengang wird ein Teilchen des Impulses p durch einen Ablenkmagneten mit dem Feld H und der Länge L abgelenkt

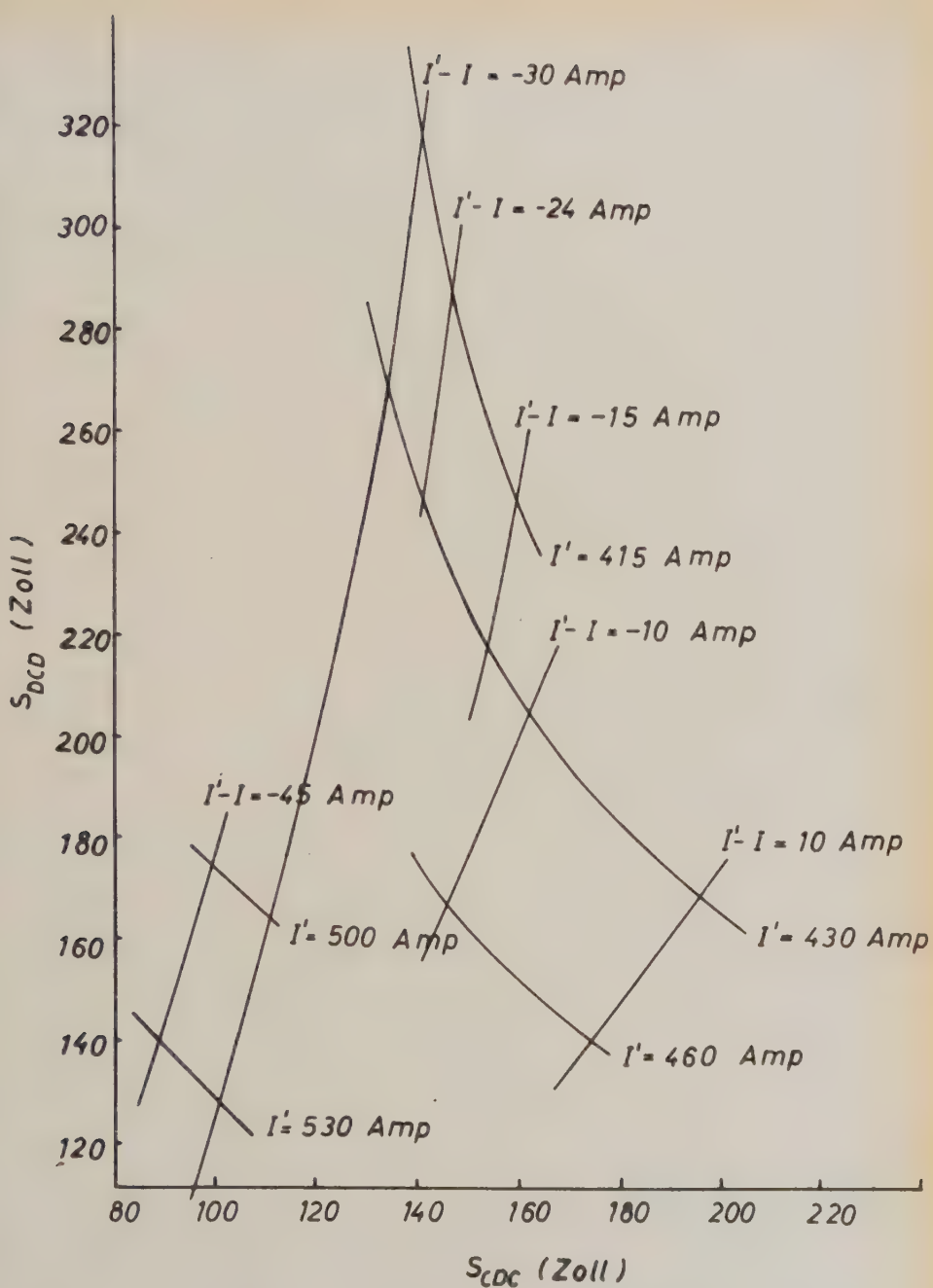


Abb. 4 : Strom-Diagramm für Quadrupol-Triplett: Lage s_{CDC} und s_{DCD} der Brennpunkte in Abhängigkeit von der Stromstärke I in den Außenmagneten und von der Stromstärke I' in den Mittelmagneten.

um einen Winkel Θ (Abb.5); für Θ gilt:

$$(11) \quad \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{L}{2r}, \quad \text{wobei } r = \frac{c}{e} \frac{p}{H}$$

der Krümmungsradius im Magnetfeld ist. Für nicht zu große Werte von Θ

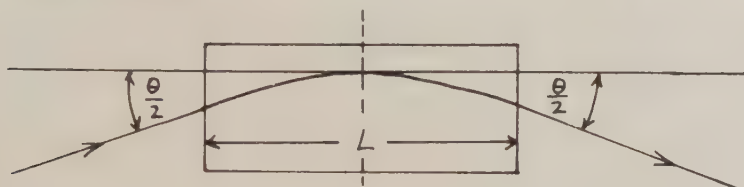


Abb.5: Ablenk magnet

ergibt sich hieraus für das Auflösungsvermögen die Formel

$$(12) \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Da die effektive Länge L we e des Streufeldes nicht genau bekannt ist und man andererseits Teilchen eines ganz bestimmten Impulses um einen ganz bestimmten Winkel ablenken will, ist es zu empfehlen, die benötigte Feldstärke H und damit die Magnetstromstärke nicht nach Formel (11), sondern wiederum experimentell nach der Draht-Bahn-Methode zu ermitteln.

Noch aus einem anderen Grunde wurde der benutzte Ablenk magnet ausgemessen. Während ein rechteckiger Magnet in der horizontalen Ebene keine Fokussierung der Teilchen bewirkt, werden in der vertikalen Ebene die Teilchen fokussiert durch die horizontale Komponente des Streufeldes an den beiden Rändern des Magneten. Es läßt sich zeigen, daß die Eintritts- und Austrittsstelle des Magneten wie zwei dünne Linsen mit der Brennweite

$$(13) \quad f = \frac{r}{4\Theta}$$

wirken, wobei r nach (11) auch durch den Ablenkwinkel Θ gegeben ist. Mit Hilfe der Matrix-Methode kann man leicht die nur von Θ abhängige Lage des Brennpunktes und der Hauptebene für den ganzen Ablenk magnet berechnen. Jedoch wurde neben dieser Berechnung auch die Ausmessung nach der Draht-Bahn-Methode durchgeführt. Die aus der Messung bestimmte Lage des Brennpunktes stimmte mit der berechneten gut überein.

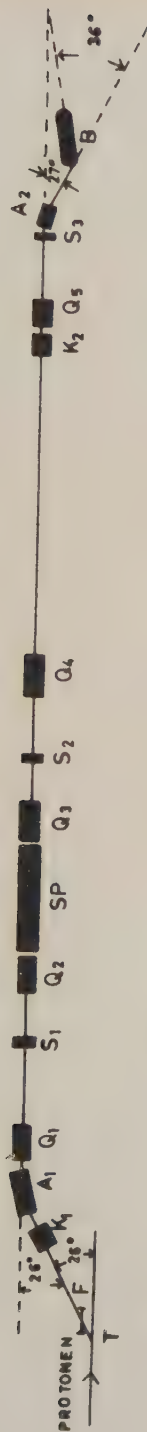


Abb. 6 : Aufbau des π -Mesonen-Strahls (T: Target, F: Fenster, K: Kollimator,
A: Ablenk magnet, Q: Quadrupol, S: Schlitz, SP: Spektrometer,
B: Blasen kammer).

1: 300

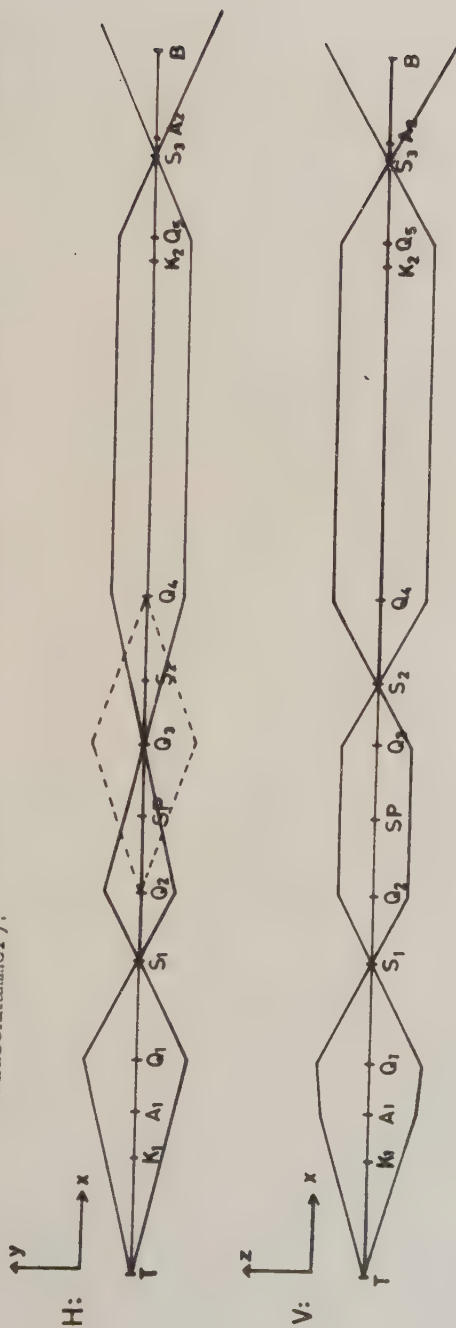


Abb. 7 : Optischer Strahlengang in der horizontalen (H) und vertikalen (V) Ebene.

C. Beschreibung des gesamten π^- -Strahls

In Abb.6 ist der apparative Aufbau des Teilchenstrahls auf ezeichnet, die Abb.7 stellt den optischen Strahlengang in den beiden Ebenen H und V schematisch dar. (Die Ablenkungen sind in Abb.7 nicht eingezeichnet.) Entlang dem Strahl ist der Abbildungsmaßstab 1:300, während in der Richtung senkrecht dazu die Abbildungen nicht maßstabsgetreu sind. (Vor allem sind in Abb.7 die Öffnungswinkel stark übertrieben.) Anhand der beiden Abbildungen soll nun der gesamte Strahl erläutert werden.

Die im Bevatron¹¹⁻¹³ (siehe auch Anhang A) beschleunigten Protonen treffen das in Abb.8 in Draufsicht abgebildete parallelogrammförmige Platin-Target T in der dargestellten Weise auf seiner Längsfläche. Der Strahl der erzeugten π^- -Mesonen wird unter einem Winkel von 26°

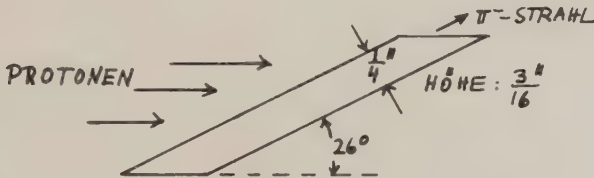


Abb.8: Target

zur Primärrichtung entnommen. Dabei beträgt die als Strahlenquelle dienende Target-Fläche $\frac{1}{4}$ " (Zoll) in H und $\frac{3}{16}$ " in V. Allerdings erleiden die Teilchen im 0,02" dicken Bevatronfenster W aus Aluminium, das unter einem Winkel von 26° durchquert wird, eine Vielfachstreuung, und die damit verbundene Richtungsänderung wirkt sich, wie man leicht durch Zurückverfolgen des Strahles sieht, so aus, als wenn die Targetfläche größer wäre. Aus den geometrischen Werten und der für die Vielfachstreuung bekannten Gaußverteilung ergab eine Berechnung für den Impuls von 1 $\frac{\text{GeV}}{c}$ eine effektive Target-Fläche von 0,32" x 0,30".

Durch den dicken Kollimator K_1 (aus Stahl) mit einer quadratischen Öffnung von ca. 1,6" x 1,6" wird aus der Gesamtheit der erzeugten Teilchen ein begrenztes Bündel ausgeblendet. Die Innenflächen des Kollimators sind dabei dem divergierenden Strahlenverlauf angepaßt, um Streuungen zu vermeiden, so daß die Vorderöffnung des Kollimators etwas kleiner ist als die Hinteröffnung.

Durch der Ablenkmagneten A_1 wird das eine Strahlenbündel horizontal

in ein Impulsspektrum von Bündeln aufzutrennt; dabei ist die Magnetstromstärke so eingestellt, daß Teilchen mit dem gewünschten Impuls genau um 26° abgelenkt werden. Durch die Quadrupollinse Q_1 werden die nach Impulsen kontinuierlich aufgefächerten, sich stark überlappenden divergenten Bündel horizontal an die Stelle des Schlitzes S_1 fokussiert. Dort entsteht also in y -Richtung (bei Vernachlässigung der Abhängigkeit der Brennweite vom Teilchenimpuls) ein Impulsspektrum von Abbildungen des Targets; eine Abbildung liegt dabei um so weiter nach rechts, je kleiner der Impuls der Teilchen ist, die diese Abbildung bewirken. (Die Größe der Abbildung ist natürlich gegeben durch die effektive Target-Fläche und das Verhältnis der Abstände TQ_1 und Q_1S_1 .) Durch den Schlitz S_1 , der aus langen Uranstäben zusammengebaut wurde, sollen nur Teilchen aus einem bestimmten, möglichst engen Impulsbereich durchgelassen werden; die Teilchen mit anderen Impulsen sollen in der Uranschicht abgebremst bzw. absorbiert werden. Für die folgenden Betrachtungen soll vorübergehend ein punktförmiges Target angenommen werden. In diesem Falle würden alle Teilchen eines bestimmten Impulses auch in einen einzigen Punkt fokussiert, und der Impuls wäre eine eindeutige, bei nicht zu großem Impulsintervall lineare Funktion von y . Da der Schlitz S_1 , um überhaupt Teilchen durchzulassen, jedoch eine endliche Weite in y -Richtung haben muß, würden auch bei punktförmigem Target immer noch Teilchen aus einem endlichen Impulsintervall Δp durchgelassen, und der Strahl wäre umso weniger monochromatisch, je breiter der Schlitz ist. Diese Art der Impulsunschärfe kann jedoch dadurch beseitigt werden, daß man in der Schlitz einen Keil stellt, der vom linken Ende des Schlitzes, wo die Teilchen mit höherem Impuls durchlaufen, zum rechten Ende hin, das zu niedrigeren Impulsen gehört, spitz zuläuft. Die Teilchen mit höherem Impuls haben dann eine größere Schichtdicke zu durchqueren und werden stärker abgebremst als die mit kleinerem Impuls; bei richtiger Wahl des Keilwinkels kann der Strahl monochromatisch gemacht werden. In Wirklichkeit hat das Target natürlich eine endliche Ausdehnung, die umso größer sein muß, je höher die Intensität des Strahls sein soll. Dadurch werden an einem Punkt Teilchen mit verschiedenen Impulsen fokussiert. Während der durch die endliche Schlitzweite auftretende Teil der Impulsunschärfe mit einem Keil beseitigt werden kann, kann man den durch die endliche Target-Weite bedingten Teil nicht ausschalten; die verbleibende Impulsunschärfe betrug $\pm 0,2\%$.

(Auf die quantitative Berechnung der Impulsunschärfe mit Hilfe von (12), des Winkels des Beryllium-Keils und der Intensität und auf die Bestimmung der dünnsten Target-, Kollimator- und Schlitzweiten und der dünnsten Anordnung der einzelnen apparativen Elemente kann hier nicht eingegangen werden. In Abb.7 sind nur vom Zentrum des Targets ausgehende Strahlen eines einzigen Impulses eingezeichnet.)

In der vertikalen Ebene wird das Target ebenfalls an die Stelle S_1 abgebildet durch den Ablenkmagnet A_1 und den Quadrupol Q_1 . Die vertikale Weite des Schlitzes ist ungefähr durch die Größe des Target-Bildes bestimmt. Das Target-Bild bei S_1 ist der abzubildende Gegenstand für den weiteren Strahlungsverlauf. In der vertikalen Ebene wird der Teilchenstrahl durch den Quadrupol Q_2 parallel gemacht. Er verläuft so durch die wagerechten, um 2,5" voneinander getrennten Platten des 230" langen Spektrometers^{2, 14, 15}, an die eine Spannung von bis zu 400 kV angelegt werden kann. Ist E die Feldstärke des elektrischen Feldes (in z-Richtung) und H die Feldstärke des magnetischen Feldes (in y-Richtung) des Spektrometers, so werden Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$(14) \quad \beta = \frac{E}{H}$$

unabgelenkt durchgelassen, während Teilchen mit größerer bzw. kleinerer Geschwindigkeit nach unten bzw. oben abgelenkt werden (siehe Formeln in ¹⁵). Da die Teilchen einheitlichen Impuls haben, kommt dadurch eine Massenseparation zustande. Der masseseparierte Strahl wird in der vertikalen Ebene durch den Quadrupol Q_3 am Schlitz S_2 fokussiert. Die nicht abgelenkten Teilchen (π -Mesonen) können dann den 0,5" hohen Schlitz passieren, während die im Spektrometer abgelenkten leichteren und schwereren Teilchen das Schlitzmaterial (Stahl) treffen und dort aus dem Strahl beseitigt werden. (Das Spektrometer wurde allerdings nur benutzt bei der Herstellung eines Strahls positiver π -Mesonen zur Beseitigung der Protonen, während beim π^- -Strahl die sehr geringe Beimischung von K^- -Mesonen und Antiprotonen vernachlässigt wurde.) Der Quadrupol Q_4 macht den Strahl dann wieder parallel.

In der horizontalen Ebene bildet der Quadrupol Q_2 das Target-Bild von S_1 auf die Mittelebene des Quadrupols Q_3 ab. Quadrupol Q_4 macht dann von diesem Bild einen parallelen Strahl. In der horizontalen Ebene ist Q_3 so eingestellt, daß die Mittelebene von Q_2 auf die

Mittelebene von Q_4 abgebildet wird (gestrichelter Strahlengang in Abb.7). Dadurch wirkt Q_3 in der horizontalen Ebene als sammelnde Feldlinse; sie biegt Strahlen, die nicht vom Mittelpunkt des Targets kommen, zur optischen Achse hin, so daß sie nicht infolge der ziemlich kleinen Öffnung von Q_4 verloren gehen; Strahlen, die vom Zentrum des Targets kommen, werden dagegen von Q_3 nicht beeinflusst.

Auf der 71 m langen Strecke zwischen Target und Blaskammer zerfallen ungefähr 75 % der erzeugten Pionen, wie man leicht aus der mittleren Lebensdauer, dem Impuls von etwa $1 \frac{\text{GeV}}{c}$ und der Länge der Strecke ausrechnen kann. Da der Pionenstrahl in der Blaskammer sehr rein sein soll, sollen die μ -Mesonen aus dem Zerfällen möglichst nicht in die Kammer gelangen. Wie man leicht durch eine Lorentz-Transformation sieht, folgt aus der räumlichen Isotropie des π -Zerfalls in μ und Neutrino im Schwerpunktsystem des π , daß für $1 \frac{\text{GeV}}{c}$ Pionen die Impulsverteilung der Zerfalls- μ -Mesonen im Laborsystem praktisch konstant ist zwischen den Extremwerten $0,58 \frac{\text{GeV}}{c}$ und $1 \frac{\text{GeV}}{c}$. Der maximale Winkel, den ein Zerfalls- μ zur Richtung des zerfallenen Pions bei $1 \frac{\text{GeV}}{c}$ haben kann, beträgt nur $2,3^\circ$. Die Winkelverteilung steigt glücklicherweise zu diesem Maximalwert hin an. Daraus ergibt sich für die Absonderung der μ -Mesonen aus dem Strahl die folgende Situation: μ -Mesonen, deren Impuls nicht zu sehr in der Nähe des Impulses des Pionstrahls liegt, werden durch die Magnetfelder, besonders durch den letzten Ablenkmagneten A_2 aus dem Strahl entfernt. Auch werden die μ -Mesonen mit nicht zu kleinem Zerfallswinkel in den Wänden des Kollimators K_2 ($5'' \times 5''$, aus Stahl) so stark abgebremst, daß sie im Magneten A_2 aus dem Strahl ausgelenkt werden. Trotzdem ist die Verunreinigung des Strahls durch μ -Mesonen, die wegen eines zu hohen Impulses und eines zu kleinen Zerfallswinkels nicht in der oben beschriebenen Weise abgetrennt werden können, noch ziemlich groß, wie eine genaue Berechnung zeigt. Daher wird der durch den Quadrupol Q_4 in beiden Ebenen parallel gemachte Strahl nicht sofort in die Kammer gelenkt, sondern durch das Quadrupoldublett Q_5 noch einmal im Schlitz S_3 (aus Uranstäber) in beiden Ebenen fokussiert. Durch diesen Schlitz werden keine μ -Mesonen mehr durchgelassen, abgesehen von denen, die praktisch Strahlimpuls und einen Zerfallswinkel von 0° besitzen. Eine genaue Berechnung ergab, daß die μ -Verunreinigung in der Kammer

kleiner als 1 % ist.

Der in S_3 fokussierte Strahl wird nicht erst wieder parallel gemacht, sondern in beiden Ebenen sehr wenig divergiert und in die Blasen-kammer gelenkt. Durch diese kleine Divergenz wird erreicht, daß sich die Spuren in der Blasen-kammer nicht überschneiden. Die Ablenkung des Strahls in die Kammer geschieht durch den Ablenkmagnet A_2 (27°) und durch das Randfeld (außerhalb der Kammer) und das Hauptfeld von 15,5 kGauß (innerhalb der Kammer) des Blasen-kammermagneten. Auf den Aufbau, die Abmessungen, die Wirkungsweise, das Magnetfeld, das Beleuchtungssystem und das Aufnahmesystem (Anordnung des Films und der 3 Linsen) der großen 72"-Wasserstoffblasen-kammer¹⁶⁻¹⁸ (siehe auch Anhang A) in Berkeley kann hier nicht eingegangen werden; in¹⁸ ist eine lange Liste von Literatur gegeben.

Es wurde oben schon erwähnt, daß die Vielfachstreuung im Bevatronfenster eine virtuelle Target-Vergrößerung und damit eine größere Impulsschärfe zur Folge hat, die nicht beseitigt werden kann. Ganz allgemein muß Vielfachstreuung möglichst vermieden werden, damit der Strahl möglichst monochromatisch, die Abbildungen möglichst scharf und klein und die Strahlenbündel möglichst eng sind. Daher wurde der Teilchenstrahl, wo es möglich war, durch evakuierte Rohre aus Stahl und innerhalb der Magnete aus Aluminium geleitet. Das erste Vakuum-system erstreckt sich vom Bevatronfenster bis vor der Schlitz S_1 ; in der Nähe des Bevatrons war das Vakuumrohr noch von einem dicken Stahlrohr zur Abschirmung des Teilchenstrahl gegen das magnetische Streu-feld des Bevatrons umgeben. Das zweite Vakuumssystem reichte vom Schlitz S_1 bis vor den Schlitz S_2 , das dritte vom Schlitz S_2 bis vor den Quadru-pol Q_4 , das vierte von Q_4 bis zum Kollimator K_2 , das fünfte von K_2 bis zum Schlitz S_3 . Die durch die 0,0075" dicken Eintritts- und Aus-trittsfenster aus Mylar verursachte Vielfachstreuung war bedeutend geringer, als wenn der Strahl durch Luft gegangen wäre. Außerdem be-fanden sich die Fenster fast immer in der Nähe eines Schlitzes, also in der Nähe einer Abbildung des Targets. Dort hatte die Vielfach-streuung nur einen sehr geringen Einfluß. (Eine Vielfachstreuung, die genau an der Stelle einer Abbildung stattfindet, beeinträchtigt die Schärfe eines späteren Bildes überhaupt nicht.)

Wenn die Teilchen ein Fenster durchqueren, erleiden sie nicht nur Vielfachstreuung, sondern werden auch abgebremst. Aus den bekannten Schichtdicken der Fenster und der Luftschichten und ihrem Bremsvermö-gen ergaben sich die folgenden Werte für der Teilchenimpuls an den

verschiedenen Stellen des Strahls, wenn der Impuls in der Mitte der Blaskammer $1,030 \frac{\text{GeV}}{c}$ betrug:

bei A_1, Q_1 :	$1,085 \frac{\text{GeV}}{c}$,
bei Q_2, SP, Q_3 :	$1,077 \frac{\text{GeV}}{c}$,
bei Q_4 :	$1,068 \frac{\text{GeV}}{c}$,
bei Q_5 :	$1,067 \frac{\text{GeV}}{c}$,
bei A_2 :	$1,063 \frac{\text{GeV}}{c}$.

Aus diesen Werten und den Ergebnissen der Draht-Bahn-Messungen wurden die genauen Magnetströme bestimmt.

Da die Abbremsung (durch Elektronenstöße) kein kontinuierlicher Prozeß ist, erhält ein völlig monochromatischer Strahl beim Durchqueren von Materie eine gewisse Impulsunschärfe (Landau-Effekt). Die Impulsunschärfe infolge dieses Effektes wurde mit Hilfe der bekannten Fensterdicken, der Rutherford-Formel und der Monte-Carlo-Methode zu $\pm 0,2 \%$ berechnet. Die gesamte Impulsunschärfe des Strahls (durch endliche Targetweite und Landau-Effekt) betrug demnach etwa $\pm 0,3 \%$.

Mit Hilfe von mehreren Theodoliten wurden die Standorte der einzelnen Magnete, Schlitze usw. des Strahls festgelegt und markiert und die Magnete, Schlitze usw. mit Kränen in die richtigen Stellungen gebracht und mit den Theodoliten genau ausgerichtet und horizontal und vertikal einjustiert. Mit Hilfe von vielen Szintillationszahlern wurde der Teilchenstrahl durch den apparativen Aufbau hindurch verfolgt, die horizontalen und vertikalen Profile des Teilchenstrahls an den Schlitzen bestimmt, die Teilchenintensitäten an den verschiedenen Stellen gemessen und letzte Justierungen vorgenommen. (Z.B. konnte Q_4 in beiden Richtungen ein wenig verschoben werden; dadurch wurden kleine Abweichungen in der Strahlrichtung ausgeglichen.) Zur Ausmessung der Strahl-Profile und der Intensitäten wurden auch 50μ dicke Test-Emulsionen verwendet. Nachdem der Strahl auf diese Weise vom Bevatron bis zur Blaskammer genau einjustiert war, wurden Blaskammerbilder aufgenommen (10 Aufnahmen pro Minute, ca. 16 π^- -Spuren pro Aufnahme).

Bevor auf die Auswertung der Bilder eingegangen wird, soll nun zunächst die der Auswertung zugrundeliegende Theorie zur Bestimmung des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts besprochen werden.

II. Theorie zur Bestimmung des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts

A. Einleitung

Obwohl die Pion-Pion-Wechselwirkung von großem theoretischen Interesse zum Verständnis der starken Wechselwirkungen und zur Erklärung der elektromagnetischen Struktur des Nukleons ist (S. 57), ist über den Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\pi\pi}$ für elastische $\pi\pi$ -Streuung bis heute experimentell fast noch nichts bekannt. Der Grund dafür ist natürlich, daß man $\sigma_{\pi\pi}$ nicht direkt messen kann. Es gibt ja keine dichten Targets unstabiler Teilchen, und die Intensität herstellbarer Pion-Strahlen ist viel zu gering, um eine merkliche Anzahl von $\pi\pi$ -Streuungen zu liefern, wenn man zwei solcher Teilchenstrahlen gegeneinanderschließt. Daher muß der Wirkungsquerschnitt der $\pi\pi$ -Streuung indirekt aus experimentell realisierbaren Prozessen ermittelt werden, zu denen die $\pi\pi$ -Wechselwirkung einen Beitrag liefert. Dieser Beitrag muß dann von anderen Beiträgen abgetrennt werden, was oft nicht eindeutig und exakt möglich ist.

Die Reaktionen, in denen die $\pi\pi$ -Wechselwirkung am leichtesten und eindeutigsten untersucht werden kann (ohne Beteiligung starker Wechselwirkungen), sind die Paarerzeugung zweier π -Mesonen durch γ -Quanten und die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ ¹⁹. Wie in¹⁹ gezeigt ist, benötigt man zur Paarerzeugung im Coulombfeld γ -Quanten von mehreren GeV. Zur Zeit können γ -Quanten mit dieser hohen Energie und auch zusammenstoßende e^+e^- -Strahlen für die 2. Reaktion noch nicht hergestellt werden. Eine andere experimentell zusätzliche Reaktion zur Untersuchung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung ist die Erzeugung eines Pions im Pion-Nukleon-Stoß:



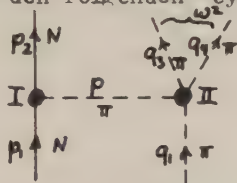
Da das Nukleon - modellmäßig gesprochen - aufgefaßt werden kann als ein "nackter" Nukleon-Kern plus einer ihn umgebenden Wolke ständiger absorbierten und emittierter virtueller π -Mesonen ("elektromagnetische Struktur des Nukleons"), sind zwei Arten von Pion-Erzeugungsprozessen möglich: Das einlaufende Pion kann mit dem Nukleon-Kern zentral zusammenstoßen und dabei ein Pion erzeugen. Oder es kann mit einem virtuellen Pion in der Pion-Wolke zusammenstoßen und dieses frei und reell machen. In diesem letzteren Mechanismus, der hier von Interesse ist und im folgenden "Ein-Pion-Austausch" genannt wird, spielt das Nukleon selbst eine ziemlich unbedeutende Rolle, indem es nur als "Träger" des virtuellen Target-Pions dient. Da das Nukleon

nicht zentral getroffen wird, erhält es nur einen kleinen Impuls, und man kann daher anschaulich verstehen, daß zur Bestimmung des $\pi\pi$ -Streuquerschnitts solche Ereignisse von Bedeutung sind, bei denen das auslaufende Nukleon nur einen kleinen Impuls hat.

In Wirklichkeit lassen sich die verschiedenen Mechanismen, die zur Pion-Erzeugung beitragen, im physikalisch erlaubten Gebiet für den Nukleonimpuls ("physikalisches Gebiet") nicht voneinander trennen, und man muß eine Extrapolation zu einer Stelle im unphysikalischen Gebiet ausführen, an der alle anderen Beiträge wegfallen. Diese quantitative Behandlung der Bestimmung von $\sigma_{\pi\pi}$ aus obiger Reaktion stammt von Chew und Low¹ und soll im folgenden beschrieben werden.

B. Quantitative Beschreibung der Chew-Low-Methode; Kinematik

Der oben anschaulich beschriebene Ein-Pion-Austausch wird dargestellt durch den folgenden Feynman-Graphen:



Zunächst sollen die folgenden kinematischen Größen definiert werden:

$p_1 = (\vec{p}_1, E_1)$ = Vierer-Impuls des einlaufenden Nukleons,

$p_2 = (\vec{p}_2, E_2)$ = Vierer-Impuls des auslaufenden Nukleons,

$q_i = (\vec{q}_i, \omega_i)$ = Vierer-Impuls des i-ten Pions ($i = 1, 3, 4$),

$p^2 = (p_2 - p_1)^2$ = relativistisch invarianter "Impulsübertrag" (p = Viererimpuls des Zwischenpions),

ω = Gesamtenergie der beiden auslaufenden Pionen in ihrem Schwerpunktsystem,

$\vec{q}_{4L}$ = Impuls des einlaufenden Pions im Laborsystem,

μ = Masse des Pions,

M = Masse des Nukleons.

Die Chew-Low-Methode besteht nun darin, von jedem Ereignis p^2 und ω^2 zu messen und so die zweidimensionale Verteilung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2, \omega^2)$$

anzufertigen. Diese Verteilung hat als Funktion von p^2 für festes ω^2 einen Pol zweiter Ordnung im Punkte $p^2 = -\mu^2$ im unphysikalischen Gebiet, mit dem Residuum

$$(16) \quad F(-\mu^2, \omega^2) = -\frac{f^2}{2\pi} \frac{\omega(\frac{1}{4}\omega^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{q_{1L}^2} \sigma_{\pi\pi}(\omega^2).$$

Hierbei ist $f^2=0,08$ die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante²⁰. Trägt man also die experimentelle Größe

$$(17) \quad F(p^2, \omega^2) \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2 + \mu^2)^2$$

für festes ω^2 als Funktion von p^2 auf und extrapoliert diese Verteilung zum nichtphysikalischen Punkt $p^2 = -\mu^2$, so erhält man $F(-\mu^2, \omega^2)$ und damit nach (16) den $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt für dieses ω^2 , da alle anderen Größen auf der rechten Seite von (16) bekannt sind.

Bevor Formel (16) hergeleitet wird, sollen einige kinematische Überlegungen angestellt werden. In dieser Arbeit soll aus der Reaktion

$$(18) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p + \pi^0$$

nur der totale, nicht der differentielle $\pi\pi^0$ -Wirkungsquerschnitt bestimmt werden. Daher sind die Streuwinkel der beiden auslaufenden Pionen nicht von Interesse. Man braucht also nur die Bewegung des Schwerpunktes der beiden Pionen zu betrachten und kann die Reaktion (18) auffassen als eine Zwei-Körper-Reaktion, aus der ein Proton (mit Impuls p_p , Streuwinkel Θ_p , Gesamt-Energie E_p im Laborsystem) und ein Teilchen mit der Ruhemasse ω (siehe Definition von ω) und dem Impuls $\vec{p}_\omega$ herauskommen. Nach dieser Zurückführung auf den Zweikörper-Fall ergeben sich die folgenden und andere kinematische Formeln sehr einfach.

Als Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist der Impulsübertrag p^2 relativistisch invariant und kann z.B. durch Größen im Laborsystem ausgedrückt werden. (Im Laborsystem ist $\vec{p}_1=0$, $E_1=M$, $\vec{p}_2=\vec{p}_p$, $|\vec{p}_2|=p_p$):

$$(19) \quad p^2(p_p) = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2 - (E_2 - E_1)^2 = p_p^2 - (\sqrt{p_p^2 + M^2} - M)^2,$$

$$\text{wobei } \sqrt{p_p^2 + M^2} - M = T_p$$

die kinetische Energie des auslaufenden Protons ist. (Für kleine Impulse p_p gilt also $p^2=p_p^2$). Durch Messung des Protonimpulses p_p kann

also p^2 eines Ereignisses bestimmt werden. ω^2 eines Ereignisses ergibt sich aus dem Impuls p_p und dem Streuwinkel Θ_p nach dem Impuls- und Energiesatz:

$$\text{Impulssatz: } p_{\omega}^2 = q_{1L}^2 + p_p^2 - 2q_{1L}p_p \cos \Theta_p,$$

$$\text{Energiesatz: } E_o \equiv \sqrt{q_{1L}^2 + \mu^2} + M = \sqrt{p_{\omega}^2 + \omega^2} + \sqrt{p_p^2 + M^2}.$$

Hieraus ergibt sich für ω^2 :

$$(20) \quad \omega^2(p_p, \Theta_p) = (E_o - \sqrt{p_p^2 + M^2})^2 - (q_{1L}^2 + p_p^2 - 2q_{1L}p_p \cos \Theta_p).$$

Als die beiden unabhängigen Variablen der Reaktion (18) können die für das Experiment interessierenden Größen p^2 und ω^2 genommen werden. Alle physikalisch erlaubten Wertepaare (p^2, ω^2) bilden - für gegebenen Primärimpuls - einen zweidimensionalen Phasenraum. Für konstantes ω^2 erhält man die obere Grenze für p^2 , wenn das Proton im Schwerpunktsystem der Reaktion (18) nach vorne gestreut wird, und die untere Grenze für p^2 , wenn das Proton nach hinten gestreut wird. Im Laborsystem bedeutet das in beiden Fällen Vorwärtsstreuung. Man erhält also die Formel für die Phasenraumgrenze aus (20), indem man $\cos \Theta_p = 1$ setzt und p_p nach (19) durch p^2 ersetzt. Die Gleichung lautet:

$$(21) \quad \omega^2 = \left(\sqrt{q_{1L}^2 + \mu^2} - \frac{p^2}{2M} \right)^2 - \left(q_{1L} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2M} \right)^2 + p^2} \right)^2.$$

In Abb. 9 ist der Phasenraum für den hier verwendeten Primärimpuls $q_{1L} = 1.03 \frac{\text{GeV}}{c}$ dargestellt. Die gestrichelte Linie zeigt den Wert $p^2 = -\mu^2$, bis zu dem hin extrapoliert wird. Man sieht, daß die Strecke, über die extrapoliert werden muß (von der unteren Grenze für p^2 bis $p^2 = -\mu^2$), von ω^2 abhängt. Da Ereignisse mit Impulsen p_p bis zu ungefähr $400 \frac{\text{MeV}}{c}$ (entspr. $p^2 = 0.15 \text{ GeV}^2$) genommen wurden, ist für nicht zu große ω^2 das Extrapolationsintervall klein im Vergleich zum p^2 -Intervall, in dem experimentelle Daten vorliegen.

Aus einer Betrachtung von Gleichung (21) sieht man, daß umso größere Werte für ω^2 möglich sind, je größer der Primärimpuls q_{1L} ist. (ω_{max} ist gleich der Gesamtenergie im Schwerpunktsystem der Reaktion minus der Masse des Nukleons, $\omega_{\text{min}} = 2\mu$). Auch rückt die untere Grenze des Phasenraumes umso näher an die Extrapolationsstelle $p^2 = -\mu^2$ heran, je höher der Primärimpuls ist. Trotz dieser Vorteile empfiehlt es sich nicht, zur Untersuchung des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts bei niedrigen Energien ω^2 einen zu hohen Primärimpuls

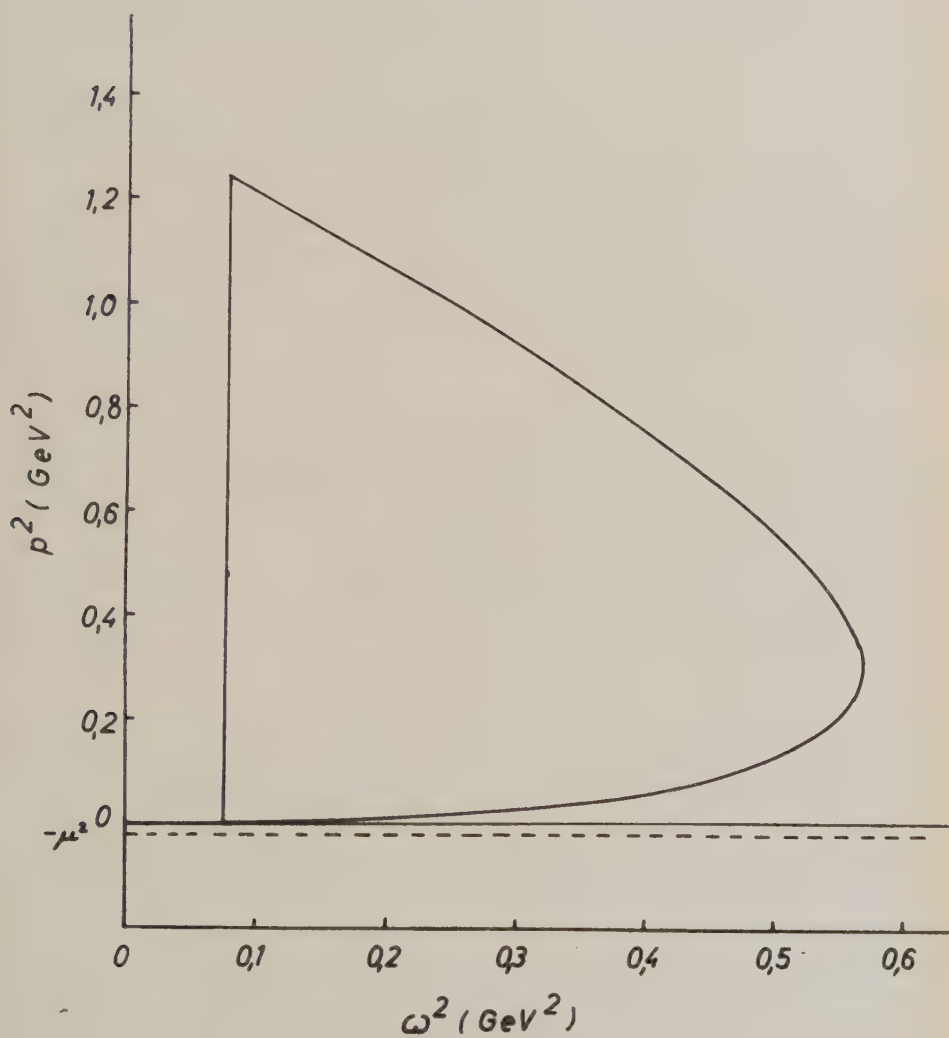


Abb.9 : hasenraum (p^2, ω^2) für Primärimpuls von $1,03 \frac{\text{GeV}}{c}$
 (p^2 ist der Vierer-Impulsübertrag, ω die Gesamtenergie der beiden Pionen).

zu verwenden, da dann die Ereignisse auf ein großes ω^2 -Gebiet verteilt sind und man eine sehr große Statistik braucht, um pro ω^2 -Intervall noch genügend viele Ereignisse zur Durchführung der Extrapolation zu haben.

C. Herleitung der Formel des Ein-Pion-Austauschs

Es soll nun die in¹ nur kurz angedeutete Herleitung der Formel (16) durchgeführt und die Chew-Low-Methode zur Bestimmung des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts begründet werden. Zunächst soll die relativistisch invariante Streuamplitude gefunden werden, die zu dem obigen Feynman-Diagramm des Ein-Pion-Austauschs gehört.

Der Beitrag des Yukawa-Vertex I (starke Wechselwirkung) zur Streuamplitude muß die Form

$$(22) \quad V \cdot \sigma p$$

haben. (σ_μ sind die Pauli-Matrizen). Die invariante Vertex-Funktion V hängt ab von allen Invarianten, die man aus den beiden am Vertex I auftretenden Vierer-Impulsen p_1 und p_2 bilden kann. Als die drei einzigen linear unabhängigen Invarianten können p_1^2 , p_2^2 , $p^2 = (p_2 - p_1)^2$ genommen werden. Da jedoch das einlaufende und auslaufende Nukleon wirkliche Teilchen sind, sind p_1^2 und p_2^2 keine wirklichen Variablen für die Vertex-Funktion, sondern festgelegt durch die Beziehung

$$p_1^2 = p_2^2 = -M^2.$$

V hängt also nur von p^2 , dem Impulsübertrag ab. $V(p^2)$ ist theoretisch wenig verstanden, da es noch keine befriedigende Theorie der starken Wechselwirkungen gibt. Unabhängig von diesen Kenntnissen weiß man jedoch, daß $V(-\mu^2) = \sqrt{4\pi} \frac{f}{\mu}$ ist, d.h. der Wert der Vertexfunktion an der unphysikalischen Stelle, wo das virtuelle Pion ein wirkliches Pion wird - man sagt: " p^2 liegt auf der Massenschale" -, ist gegeben durch die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante. (Eigentlich ist $V(p^2)$ eine 4×4 -Matrix, die zwischen den beiden Spinoren des einlaufenden und auslaufenden Nukleons steht, und $V(-\mu^2) = \sqrt{4\pi} \frac{f}{\mu} \gamma_5$. Jedoch ergibt die Auswertung des Spinorausdrucks dasselbe Resultat wie die obige vereinfachte Darstellung.)

Aus Drehimpuls- und Paritätserhaltung am "starken" Vertex I sieht man leicht, daß das virtuelle Pion nur im p -Zustand emittiert oder absorbiert werden kann. Der Spin des Nukleons muß also umklappen, und in der Streuamplitude tritt der Faktor $\sigma \cdot p$ auf. Später, nachdem aus der Amplitude der Wirkungsquerschnitt gebildet ist, ist über alle Spinstellungen des Nukleons zu mitteln bzw. zu summieren, da Polaris-

tionen in diesem Experiment nicht interessieren. Da der Mittelwert $\langle (\sigma \cdot p)^2 \rangle = p^2$ ist, liefert der Vertex I also effektiv den Beitrag

$$(23) \quad \sqrt{4\pi} \Gamma \quad \text{mit} \quad \Gamma^2 = \frac{f^2}{\mu^2} p^2$$

zur Streuamplitude.

Die innere Linie des virtuellen Pions liefert als Beitrag zur Streuamplitude den Propagator

$$\frac{1}{p^2 + \mu^2}.$$

Dieser Propagator bewirkt die Singularität (Pol erster Ordnung) in der Streuamplitude an der Stelle $p^2 = -\mu^2$.

Der Vier-Pionen-Vertex II wird beschrieben durch eine Funktion

$$f(p^2, s),$$

die von den beiden relativistischen Invarianten p^2 und

$$s = (q_3 + q_4)^2$$

abhängt. Im Schwerpunktsystem der beiden auslaufenden Pionen ist $\sqrt{s}$ die Gesamtenergie ω . Auch über die Vertexfunktion $f(p^2, s)$ ist nichts bekannt außer dem folgenden, für die Chew-Low-Methode entscheidenden Punkt: Wenn das ausgetauschte Pion ein wirkliches Pion ist, d.h. wenn $p^2 = -\mu^2$ ist, dann liegt am Vertex II physikalische elastische Streuung zweier Pionen vor und $f(-\mu^2, s = \omega^2)$ ist die Streuamplitude für $\pi\pi$ -Streuung, aus der der $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt folgt.

Die zum Ein-Pion-Austausch gehörige Streuamplitude lautet also

$$(24) \quad A(p^2, \omega^2) = \frac{\sqrt{4\pi} \Gamma}{p^2 + \mu^2} f(p^2, \omega^2).$$

Aus ihr ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für die im obigen Graphen dargestellte Reaktion nach²¹

$$(25) \quad d^5\sigma = \frac{1}{V_{\text{rel}} E_1 \omega_1} \left| \frac{\sqrt{4\pi} \Gamma}{p^2 + \mu^2} f(p^2, \omega^2) \right|^2 \delta^4(p_2 + q_3 + q_4 - p_1 - q_1) \delta(p_1^2 + M^2) \delta(q_3^2 + \mu^2) \delta(q_4^2 + \mu^2) \cdot d^4p_2 d^4q_3 d^4q_4.$$

V_{rel} ist die Relativ-Geschwindigkeit zwischen einlaufendem Pion und Nukleon:

$$(26) \quad V_{\text{rel}} = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{q}_1}{\omega_1} \right|.$$

Die erste (4-dimensionale) δ -Funktion drückt die Erhaltung des Vierer-Impulses aus, die drei anderen δ -Funktionen besagen, daß die drei auslaufenden Teilchen wirkliche Teilchen sind, also auf ihrer Massenschale liegen.

Die relativistisch invariante Größe $V_{\text{rel}} E_1 \omega_1$, lautet in Größen des Laborsystems ausgedrückt:

$$(27) \quad V_{\text{rel}} E_1 \omega_1 = q_{1L} M.$$

An der Stelle $p^2 = -\mu^2$, an der das ausgetauschte Pion ein wirkliches Pion (zweites der 4 Pionen) ist, erhält man die Beziehung zwischen der Streuamplitude $f(-\mu^2, \omega^2)$ für $\pi\pi$ -Streuung und dem $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt:

$$(28) \quad d^2\sigma_{\pi\pi} = \frac{1}{V_{\text{rel}\pi\pi} \omega_1 \omega_2} \left| f(-\mu^2, \omega^2) \right|^2 \delta^4(q_3 + q_4 - p - q_1) \delta(q_3^2 + \mu^2) \delta(q_4^2 + \mu^2) d^4q_3 d^4q_4.$$

Die Invariante $V_{\text{rel}\pi\pi} \omega_1 \omega_2$ läßt sich leicht ausdrücken durch Größen des Schwerpunktsystems der Pionen, in dem alle 4 Pionen gleiche Energie und gleichen Impulsbetrag haben. Es gilt

$$(29) \quad V_{\text{rel}\pi\pi} \omega_1 \omega_2 = \omega \left(\frac{1}{4} \omega^2 - \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Betrachtet man Gleichung (25) an der Stelle $p^2 = -\mu^2$, so läßt sich (28) in (25) einsetzen. Mit (23), (27) und (29) und unter Berücksichtigung von $p = p_1 = p_2$ erhält man:

$$(30) \quad d^5\sigma = \frac{4\pi f^2}{q_{1L} M} \frac{p^2/\mu^2}{(p^2 + \mu^2)^2} \omega \left(\frac{1}{4} \omega^2 - \mu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \delta(p^2 + M^2) d^4p_2 d^2\sigma_{\pi\pi} \quad \text{für } p^2 \rightarrow -\mu^2.$$

Es gilt:

$$(31) \quad \delta(p^2 + M^2) = \delta \left[(|\vec{p}_2| - \sqrt{E_2^2 - M^2}) (|\vec{p}_2| + \sqrt{E_2^2 - M^2}) \right] = \frac{1}{2|\vec{p}_2|} \delta(|\vec{p}_2| - \sqrt{E_2^2 - M^2}),$$

da $|\vec{p}_2|$ immer positiv ist. Weiter gilt:

$$(32) \quad d^4p_2 = |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| d\varphi_2 d(\cos\theta_2) dE_2.$$

Führt man mit diesen Ersetzungen in (30) die Integrationen über den Impuls $|\vec{p}_2|$ unter Berücksichtigung der δ -Funktion und über den Winkel φ_2 aus, so sieht man, daß

$$(33) \quad \delta(p^2 + M^2) d^4p_2 \quad \text{durch} \quad \pi |\vec{p}_2| dE_2 d(\cos\theta_2)$$

zu ersetzen ist. Faßt man die Größen $\vec{p}_1, E_2, \theta_2$ als Laborsystemgrößen auf, so kann das Differential $dE_2 d(\cos \theta_2)$ mit Hilfe von (19) und (20) durch $dp^2 d\omega^2$ ausgedrückt werden:

$$(34) \quad dp^2 d\omega^2 = \frac{\partial(p^2, \omega^2)}{\partial(E_2, \cos \theta_2)} dE_2 d(\cos \theta_2) = 4M |\vec{p}_1| q_{1L} dE_2 d(\cos \theta_2).$$

Setzt man schließlich (33) und (34) in (30) ein und integriert über den Pionraumwinkel, um den totalen $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt zu erhalten, so ergibt sich bis auf einen konstanten Faktor, der in den Formeln (25) und (28) weggelassen wurde (siehe Formel 3,2 und 3,7 in¹), die Formel von Chew und Low, die äquivalent ist mit (16):

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} = \frac{f^2}{2\pi} \frac{p^2/\mu^2}{(p^2 + \mu^2)^2} \frac{\omega(\frac{1}{4}\omega^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{q_{1L}^2} \sigma_{\pi\pi}(\omega^2) \quad \text{für } p^2 \rightarrow -\mu^2.$$

D. Andere Beiträge und Extrapolationsmethode

Wie schon erwähnt, liefern außer dem Ein-Pion-Austausch noch andere Feynmandiagrammen additiv Beiträge zur Gesamtamplitude für die Ein-Pion-Erzeugung. Auf diese anderen Beiträge wird unten näher eingegangen. Während jedoch der Beitrag des Ein-Pion-Austausches (siehe (24)) durch den Ein-Pion-Propagator $(p^2 + \mu^2)^{-1}$ eine Singularität an der Polstelle $p^2 = -\mu^2$ besitzt, sind die Beiträge der anderen Graphen an dieser Stelle endlich. Die Beiträge dieser anderen Erzeugungsmechanismen zu der Größe

$$F(p^2, \omega^2) \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2 + \mu^2)^2$$

(siehe (17)) verschwinden daher an der Polstelle wegen des Faktors $(p^2 + \mu^2)^2$, und nur der durch (16) oder (35) gegebene Beitrag des Ein-Pion-Austausches bleibt dort übrig und wird durch die Extrapolation bestimmt.

Trotz dieser prinzipiellen Einfachheit ist es ziemlich problematisch, wie man die Extrapolation in praxi durchführen soll. Man könnte annehmen, daß in der Umgebung des Pols und daher vielleicht auch noch am Anfang des physikalischen Gebiets (d.h. für kleine p^2) der Ein-Pion-Austausch gegenüber den anderen Mechanismen überwiegt und die anderen Beiträge daher dort vernachlässigt werden könnten. Nimmt man außerdem noch an, daß die Vertexfunktionen $V(p^2)$ und $f(p^2, \omega^2)$ (S. 20, 21) nur schwach von p^2 abhängen, so würde Formel (35), die exakt nur am Pol

selbst gilt, auch noch in der Umgebung des Pols gelten und vielleicht die p^2 -Abhängigkeit am Anfang des physikalischen Gebietes nahezu richtig beschreiben. (Diese Annahmen sind tatsächlich von einigen Autoren gemacht worden, S. 61). Der an die experimentelle Verteilung $v(p^2, \omega^2)$ anzupassende theoretische Ausdruck wäre dann, wie Formel (35) zeigt, eine Gerade durch den Nullpunkt:

$$(36) \quad F(p^2, \omega^2) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2 + \mu^2)^2 = A(\omega^2) p^2.$$

Bei genügend großer Statistik könnte der Parameter $A(\omega^2)$ durch eine Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und aus ihm $\sigma_{\pi\pi}(\omega^2)$ berechnet werden.

Ob die gerade erwähnten Vernachlässigungen wirklich erlaubt sind, läßt sich umgekehrt daraus ersehen, ob die Anpassung einer Geraden durch den Nullpunkt an die experimentellen Punkte eine gute Anpassung ist, ob also die experimentelle Verteilung wirklich durch eine solche Gerade beschrieben werden kann. Als quantitatives Maß für die Güte der Anpassung dient die aus der Theorie der Fehler bekannte, für die Anpassung zu berechnende Größe χ^2 (S. 54). An ihr wird entschieden, ob der theoretische Ausdruck eine annehmbare Anpassung erlaubt, oder als ungeeignet zu verwerfen ist. Ob die obigen Vernachlässigungen gerechtfertigt sind oder nicht, läßt sich jedoch noch augenscheinlicher nachprüfen, wenn man die experimentellen Daten nicht in der Form $v(p^2, \omega^2)$, sondern als Verteilung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} \frac{(p^2 + \mu^2)^2}{p^2}$$

in p^2 aufträgt. Wie Formel (35) zeigt, sollte diese experimentelle Verteilung unabhängig von p^2 sein, also durch eine horizontale Gerade angepaßt werden können, wenn obige Annahme richtig ist, daß Formel (35) auch in der Umgebung des Pols gilt. Es ist eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit (S. 62), daß diese Annahmen nicht gerechtfertigt sind, daß vielmehr schon am Anfang des physikalischen Gebietes andere Erzeugungsmechanismen bedeutende Beiträge liefern und der Ein-Pion-Austausch dort nicht überwiegt.

Damit wird die Extrapolation problematisch. Da es zur Zeit noch keine vollständige Theorie der starken Wechselwirkungen gibt, ist die analytische Form der anderen Beiträge nicht bekannt. Auch die p^2 -Abhängigkeit der Vertexfunktionen $V(p^2)$ und $f(p^2, \omega^2)$ ist unbekannt. Daher ist

es nicht möglich, von einer Theorie her a priori einen exakten theoretischen Ausdruck analog zu (35) anzugeben, der alle Beiträge berücksichtigt und dessen Parameter durch eine beste Anpassung an die experimentelle Verteilung $P(p^2, \omega^2)$ zahlenmäßig zu bestimmen wären. Da also eine physikalisch sinnvolle Form für $P(p^2, \omega^2)$ nicht angegeben werden kann, liegt es nahe, von einem mathematisch vernünftigen Ausdruck für $P(p^2, \omega^2)$ auszugehen, der natürlich genügend viele Parameter enthalten muß, so daß eine Anpassung an die experimentelle Verteilung möglich ist. Der bestmögliche Ausdruck ist ein Polynom in $p^2 + \mu^2$:

$$(37) \quad F(p^2, \omega^2) = A_0(\omega^2) + A_1(\omega^2)(p^2 + \mu^2) + A_2(\omega^2)(p^2 + \mu^2)^2 + \dots$$

Die Wahl dieser Gestalt für die anzupassende Funktion ist aus folgenden Gründen sinnvoll und vorteilhaft:

a) Der interessierende Wert $F(-\mu^2, \omega^2)$ der Funktion an der Polstelle ist gleich dem ersten der anzupassenden Parameter:

$$(38) \quad F(-\mu^2, \omega^2) = A_0(\omega^2);$$

er braucht also nicht erst aus mehreren Parametern berechnet zu werden.

b) Der Polynom-Ansatz ist sehr allgemein, d.h. mancher Ausdruck, der die anderen Beiträge in grober Näherung zu berücksichtigen versucht, läßt sich als Polynom in $p^2 + \mu^2$ schreiben. Hierauf wird noch näher eingegangen.

c) Die Anpassung des Polynoms (37) an die experimentellen Punkte ist sehr leicht mit der Methode der kleinsten Quadrate durchführbar. Es ergibt sich ein einfaches lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten $A_\mu(\omega^2)$ (siehe (89)).

d) Man kann mit einem Polynom immer eine gute Anpassung erreichen, wenn man bis zu einer genügend hohen Ordnung geht.

Allerdings ist es von großem Nachteil, daß die Ordnung des Polynoms nicht a priori von einer Theorie her bekannt ist. Ganz allgemein ist es nämlich so, daß der Wert der angepaßten Funktion am Pol nicht nur vom Verlauf der experimentellen Verteilung, sondern auch von der analytischen Form der Funktion selbst abhängt und zwar umso stärker, je weiter man ins unphysikalische Gebiet zu extrapolieren hat. Dadurch tritt nicht nur die Frage auf, ob man überhaupt ein Polynom statt des exakten, nicht bekannten Ausdrucks nehmen darf, sondern auch für die

Anpassung durch ein Polynom selbst ist die Frage nach der Ordnung des Polynoms sehr wichtig, da gut angepasste Polynome verschiedener Ordnungen verschiedene Werte an der Polstelle haben, während sie im physikalischen Gebiet, wo die Meßwerte vorliegen, innerhalb der statistischen Fehler der Meßwerte mehr oder weniger gleich verlaufen. Wenn ein Polynom einer gewissen Ordnung eine gute Anpassung erlaubt, ermöglichen natürlich auch alle höheren Ordnungen eine gute Anpassung, wobei aus leicht verständlichen Gründen die Fehler in den angepassten Koeffizienten umso größer sind, je höher die Ordnung des Polynoms ist. Es ist jedoch nicht immer physikalisch sinnvoll, das Polynom niedrigster Ordnung zu nehmen; denn bei einer geringen Statistik, d.h. bei großen statistischen Fehlern an den experimentellen Punkten wird schon ein Polynom sehr kleiner Ordnung eine gute Anpassung erlauben, während es nach Verkleinerung der experimentellen Fehler durch Ansammlung von weiteren Ereignissen vielleicht nicht mehr als gute Anpassung in Frage kommt und zu einer höheren Ordnung geßagen werden muß. Der einzige Ausweg aus dieser Unsicherheit in der Ordnung des Polynoms ist die Ansammlung einer sehr großen Anzahl von Ereignissen, so daß die Fehler an den Meßpunkten sehr klein sind und dadurch der Verlauf der angepaßten Kurve im physikalischen Gebiet so streng festgelegt ist, daß die gutpassenden Polynome verschiedener Ordnung auch an der nicht weit entfernten Polstelle noch nahezu denselben Wert haben. Erst dann ist es sinnvoll, unter diesen Polynomen dasjenige niedrigster Ordnung als passenden Ausdruck für $P(p^2, \omega^2)$ zu nehmen; die Polynome höherer Ordnung sind dann praktisch diesem niedrigsten Polynom äquivalent, da die zusätzlichen Terme für kleine p^2 sehr klein sein werden. Wie diese Überlegungen zeigen, ist bei der Anpassung der experimentellen Verteilung durch ein Polynom eine große Anzahl von Ereignissen nicht nur zur Durchführung der Extrapolation selbst erforderlich, sondern auch zur Entscheidung über die Ordnung des Polynoms.

Es soll nun auf die Beiträge zur Streuamplitude näher eingegangen werden, die außer dem in Formel (35) ausgedrückten Ein-Pion-Austausch noch zu berücksichtigen sind; spezielle Näherungsmöglichkeiten sollen diskutiert werden. Der Beitrag des Ein-Pion-Pols zur Streuamplitude hat die Form

$$A \frac{\sigma p}{p^2 + \mu^2} ,$$

wobei A nicht mehr von p^2 abhängt. Ohne spezielle Kenntnis über die

anderen Beiträge kann man sie alle berücksichtigen durch einen zusätzlichen additiven Term B in der Streuamplitude, so daß die gesamte Streuamplitude lautet

$$(39) \quad A \frac{\sigma \cdot p}{p^2 + \mu^2} + B.$$

Von ihr ist beim Übergang zum Wirkungsquerschnitt das Quadrat des Betrages zu bilden. B wird im allgemeinen von den beiden Invarianten $\sigma \cdot p$ und p^2 abhängen und ist endlich für $p^2 = -\mu^2$. Eine mögliche Näherung ist es jedoch anzunehmen, daß B sich über den hier interessierenden kleinen p^2 -Bereich um den Pol nur wenig ändert im Vergleich zum ersten Term, der sich natürlich in Polnähe sehr stark mit p^2 ändert. Faßt man B also als eine Konstante auf und berücksichtigt man bei der Mittelung über die Spinstellungen, daß

$$(40) \quad \langle \sigma \cdot p \rangle = 0 \\ \langle (\sigma \cdot p)^2 \rangle = p^2$$

ist, so erhält man für $F(p^2, \omega^2)$ ein quadratisches Polynom in $p^2 + \mu^2$.

Dies ist die grösste Näherung, die andere Beiträge mit berücksichtigt. Sind also andere Beiträge vorhanden, d.h. ist $B \neq 0$, so erwartet man als passenden Ausdruck ein Polynom von zumindest zweiter Ordnung; eine Gerade kommt nur in Frage, wenn nur der Polterm vorhanden ist, wie oben ausgeführt wurde.

Eine bessere Näherung ist es, B in eine Taylorreihe zu entwickeln und diese nach einer gewissen Anzahl von Gliedern abzubrechen. Wegen (40) lautet die allgemeine Form:

$$(41) \quad B(p^2, \sigma \cdot p) = B_1(p^2) + B_2(p^2) \sigma \cdot p,$$

wobei B_1 und B_2 Taylorreihen in p^2 sind. Auch mit diesem Ansatz erhält man für $F(p^2, \omega^2)$ ein Polynom in p^2 oder, was dasselbe ist, in $p^2 + \mu^2$.

In der Grösse B sind folgende Beiträge berücksichtigt:

- 1) Die p^2 -Abhängigkeit der Vertexfunktionen $V(p^2)$ und $f(p^2, \omega^2)$ kann durch eine Reihenentwicklung an der Polstelle berücksichtigt werden. Der erste Entwicklungsterm ist in A, der Rest der Entwicklung in B enthalten (Formel (39)).
- 2) Neben dem Ein-Pion-Austausch gibt es, wie auf S. 16 dargelegt wurde, die direkte Pion-Erzeugung am Nukleon-Kern. Wegen der starken Wechselwirkung ist über die Form des Matrixelementes nicht viel bekannt; der Prozess kann nur durch ein summarisches Feynman-Diagramm



dargestellt werden. Dieser theoretisch wenig erfassbare Erzeugungsmechanismus ist ebenfalls in B enthalten.

3) Statt eines Pions können auch 3, 5 usw. Pionen ausgetauscht werden. Der Austausch einer geraden Anzahl von Pionen ist nicht möglich, da wegen der Erhaltung des Eigenwerts des G -Operators²² ($G = \exp[i\pi I_2]$), d.h. die G -Transformation ist eine Drehung um π um die y -Achse im Isospinraum mit anschließender Ladungskonjugation. Ein Pion ist Eigenzustand von G zum Eigenwert -1 eine gerade Anzahl Pionen nur in eine gerade Anzahl und eine ungerade Anzahl nur in eine ungerade übergehen kann. Der Drei-Pionen-Austausch wird durch folgender Graphen dargestellt:



Während ein Pion in seinem Ruhesystem nur einen einzigen Energiewert, nämlich seine Ruhemasse μ annehmen kann und demnach die Streuamplitude des Bin-Pion-Austausches durch der Propagator des einen ausgetauschten Pions einen Pol an der Stelle $p^2 = -\mu^2$ besitzt, können 3 Pionen in ihrem Ruhesystem alle Energiewerte m von 3μ bis ∞ annehmen. Die Streuamplitude für den Drei-Pionen-Austausch ist daher ein Integral über alle möglichen Werte von m (Dispersionsrelation) der Form

$$\int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{\rho_3(m^2)}{p^2 + m^2} dm^2$$

und besitzt als Funktion von p^2 eine kontinuierliche Singularität (Verzweigungsschnitt) entlang der negativen reellen Achse von $-(3\mu)^2$ bis $-\infty$. Dasselbe gilt für den Fünf-Pionen-Austausch von $-(5\mu)^2$ bis $-\infty$ usw. Der gesamte Beitrag der Pion-Austauschprozesse zur Streuamplitude läßt sich daher in der Form schreiben:

$$(42) \quad A \frac{\sigma_P}{p^2 + \mu^2} + \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{\rho(m^2)}{p^2 + m^2} dm^2,$$

wobei das Integral in der Größe B in (39) enthalten ist. Die Lage der von den einzelnen Pion-Austausch-Graphen beizutragenden Singularitäten ist in Abb. 10 in der komplexen p^2 -Ebene dargestellt.

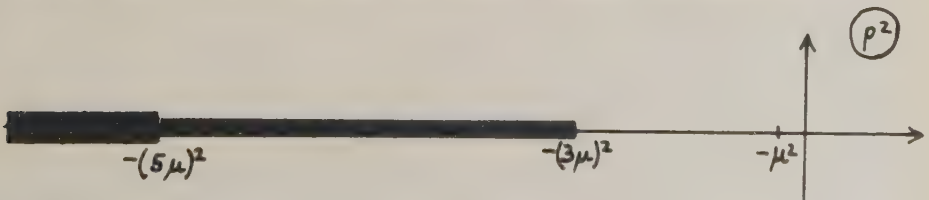


Abb. 10: Lage der Singularitäten

Über die "Stärke" $g(m^2)$ der Beiträge längs des Verzweigungsschnitts ist nichts bekannt.

Mit der Begründung, daß der Verzweigungsschnitt im Vergleich zum Ein-Pion-Pol weit vom physikalischen Gebiet für den Impulsübertrag p^2 entfernt ist, kann man die Näherung zu machen versuchen, den ganzen Schnitt durch einen effektiven Pol an der Stelle $-m^2$ und mit der Stärke C zu ersetzen, so als trüge nur diese Stelle bei. Diese Näherung entspricht also in der Elektrostatik der Ersetzung einer fernen Ladungsverteilung durch eine Punktladung. (Diese Analogie stammt von Chew). Die Mehr-Pionen-Austauschprozesse liefern dann den Beitrag

$$(43) \quad \frac{C}{p^2 + m^2}$$

zur Streuamplitude, wobei C und m unbekannte Parameter sind und durch eine beste Anpassung gefunden werden könnten. Da die Größe in (39) jedoch noch andere Beiträge enthält, ist es besser, den Ausdruck (43) in einer Reihe in p^2 zu entwickeln. Dies ist möglich, da die hier interessierenden Werte für p^2 ziemlich klein sind und $m > 3\mu$ ist. Auch diese Entwicklung ergibt also für $F(p^2, \omega^2)$ ein Polynom in $p^2 + \mu^2$.

Diese Betrachtungen spezieller Beiträge außer dem Ein-Pion-Austausch haben gezeigt, daß ein Polynom-Ansatz trotz der oben genannten Schwierigkeiten der beste und all gemeinste Ansatz ist, den man zur Zeit machen kann, wo eine genaue Theorie noch fehlt. In der Auswertung der Ergebnisse (S. 52) wurden daher die experimentellen Verteilungen durch ein Polynom angepaßt.

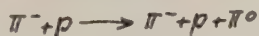
Nach diesen theoretischen Betrachtungen soll auf die Auswertung der Blasenkammer-Filme eingegangen werden.

III. Auswertung der Blasen-kammerfilme

A. Durchmusterung der Filme

Zur experimentellen Bestimmung des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts nach der oben behandelten Theorie wurde die Filme der 72"-Wasserstoff-Blasen-kammer benutzt, die mit $1.03 \frac{\text{eV}}{c}$ π^- -Mesonen aus dem Bevatron beschossen worden war. Die drei entsprechenden Bilder einer Stereoaufnahme wurden mit Hilfe eines dreilinsigen Projektionsapparates der Alvarez-Gruppe über zwei Spiegel auf einen Meßtisch übereinander abgebildet. Die Abbildung der gesamten Blasenkommer war ca. 110 cm lang und 30 cm breit. (Siehe Anhang A). Der Film konnte in Längsrichtung vor- und rückwärts bewegt werden, so daß alle Teile eines Bildes vom Durchmusterer am vorderen Ende des Tisches bequem untersucht werden konnten. Während die mittlere Linse P_2 des Projektionsapparates feststand, konnten die Linsen P_1 und P_3 in beiden horizontalen Richtungen bewegt werden, so daß entsprechende Punkte (z.B. Abbildung einer Blase, eines Ereignisscheitels, eines Spurendeckels, einer Orientierungsmarke auf dem Deckglas der Blasenkommer) auf dem Meßtisch superponiert werden konnten. Die zu den drei Projektoren gehörigen drei Lampen konnten einzeln ein- und ausgeschaltet werden.

Die Filme der 72"-Blasenkommer wurden auf dem Meßtisch nach Ereignissen des Typs



durchsucht²³. Ein Ereignis dieses Typs wurde registriert und in die Statistik aufgenommen, wenn die folgenden Bedingungen alle erfüllt waren:

- a) Das einlaufende π^- ist ein π^- des Pion-Strahls, d.h. hat die richtige Flugrichtung und den richtigen Impuls.
- b) Das Ereignis findet innerhalb eines durch den Zählerstab in der Kammer und die Orientierungsmarken der Deckplatte definierten großen Teilvolumens der Blasenkommer statt. Diese Definition ist nötig wegen der Anwendung eines geometrischen Korrekturfaktors (S.42).
- c) Das auslaufende Proton kommt innerhalb des definierten Teilvolumens in der Kammer zur Ruhe und ist dadurch und aus seinem Krümmungsradius im Magnetfeld als solches erkennbar. (Ein zur Ruhe gekommenes π^+ zerfällt und ist außerdem am Ende stärker gekrümmt.)
- d) Die gesamte Blasenkommer war während der Aufnahme überall empfindlich. (Diese Forderung ist nötig wegen des Korrekturfaktors.)

Um die Verlustrate beim Durchmustern der Filme festzustellen, wurden mehrere Filme ein zweites Mal durchsucht. Es ergab sich, daß etwa 4 % aller Ergebnisse beim ersten Durchmustern übersehen worden waren. Die Durchmusterungswirksamkeit betrug also 96 %.

Für die Extrapolation sind die Ereignisse mit sehr kleinem Protonenimpuls p_p von großer Wichtigkeit. Daher wurde die untere Grenze für p_p so niedrig wie möglich gesetzt, nämlich $p_{pmin} = 115 \frac{\text{MeV}}{c} (p^2 = 0.0125 \text{GeV}^2)$, entsprechend einer Reichweite von 0,5 cm, und nur Ereignisse mit noch kleinerem p_p wurden nicht genommen. Das wichtigste Ergebnis der zweiten Durchmusterung war, daß die Ereignisse mit sehr kleiner Protonenreichweite nicht häufiger übersehen wurden als Ereignisse mit gut sichtbarer Protonspur. Die Gründe für die hohe Durchmusterungswirksamkeit für Ereignisse mit sehr kurzer Protonspur sind die folgenden:

- a) Das Durchsuchen der Filme wurde mit sehr großer Sorgfalt durchgeführt und besondere Konzentration darauf verwendet, die Ereignisse mit kurzem Proton nicht zu übersehen.
- b) Jede π^- -Spur, die in Richtung und Krümmung von den Spuren des Primärstrahls abwich, wurde zurückverfolgt; es wurde festgestellt, ob sie aus einer Reaktion kam. Dies ist die wirksamste Methode, die Ereignisse mit kurzem Proton nicht zu übersehen.

B. Ausmessung eines Ereignisses

Sobald ein Ereignis gefunden war, wurden an der zur Ruhe kommenden Protonspur vier Größen gemessen, aus denen der Protonstreuungswinkel θ_p und der Protonenimpuls p_p bestimmt werden konnten (siehe unten). Während das Auffinden eines Ereignisses im Durchschnitt 15 bis 30 Minuten in Anspruch nahm (ungefähr ein Ereignis pro 20 Blasenkammeraufnahmen mit ca. 16 π^- -Spuren pro Aufnahme), dauerte das Ausmessen des Ereignisses nur eine Minute. Das benutzte Meß- und Auswerteverfahren ist sehr einfach und stammt im wesentlichen von R. R. Lynch²⁴. Seine Anwendung und einige Zusätze für das hier behandelte Experiment sind in²³ dargelegt. Im folgenden sollen die benutzten Formeln kurz hergeleitet und das Verfahren beschrieben werden.

Es wird im folgenden immer die Näherung kleiner Öffnungswinkel gemacht, d.h. der Abstand eines Punktes in der Blasenkammer von den drei Linsenachsen wird als klein gegen den Abstand des Punktes von den Linsen angenommen. Wegen der großen Ausmaße der Kammer ist diese Bedingung nicht überall in der Kammer gut erfüllt; jedoch wird

sich zeigen, daß die Klein-Winkel-Näherung für die hier geforderte Genauigkeit voll ausreicht.

Die Abbildung eines Punktes P in der Blasenkammer durch eine der drei Linsen auf den Film wäre einfach durch den Strahlensatz bestimmt, wenn die Strahlen nicht durch die Brechung im Deckglas (Dicke $L_g = 17$ cm, Brechungsindex $n = 1.5$) und im Wasserstoff ($n_H = 1.09$) abgelenkt würden. Jedoch hat man die Brechung im Glas berücksichtigt und kann geraden Strahlenverlauf annehmen, wenn man den wirklichen Abstand $L_f = 190$ cm der Ebene der Orientierungsmarken ("Markenebene") von der Linse durch der effektiven (kürzeren) Abstand

$$L'_f = L_f - L_g + L_g/n = 182 \text{ cm}$$

ersetzt (Abb.11). Ebenso ist die Brechung im Wasserstoff berücksichtigt

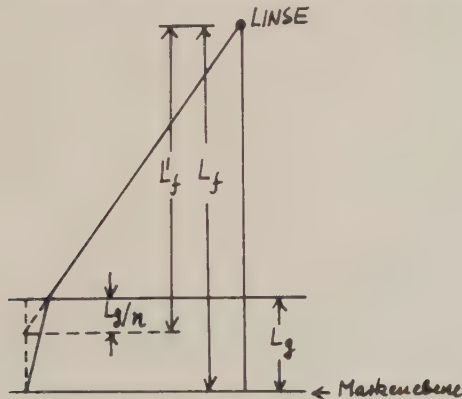


Abb.11: Brechung in der Glasplatte

wenn man die z -Koordinate des Punktes P ($z=0$ für Markenebene) durch $z' = z/n_H$ ersetzt. (Diese Ersetzungen sind in der Klein-Winkel-Näherung gleich für alle drei Linsen).

Abb.12 zeigt die Abbildung eines Punktes P und einer Marke M durch die beiden Linsen L_1 und L_2 auf den Film (Abbildungen P_1, M_1 bzw. P_2, M_2). Es gelten die Beziehungen (Bezeichnungen folgen aus Abb.12):

$$(44) \quad \frac{a_1}{a} = \frac{s}{L'_f + z'} \quad , \quad \frac{b_1}{b} = \frac{s}{L'_f} \quad ,$$

$$\frac{a_2}{d+a} = \frac{s}{L'_f + z'} \quad , \quad \frac{b_2}{d+b} = \frac{s}{L'_f} \quad .$$

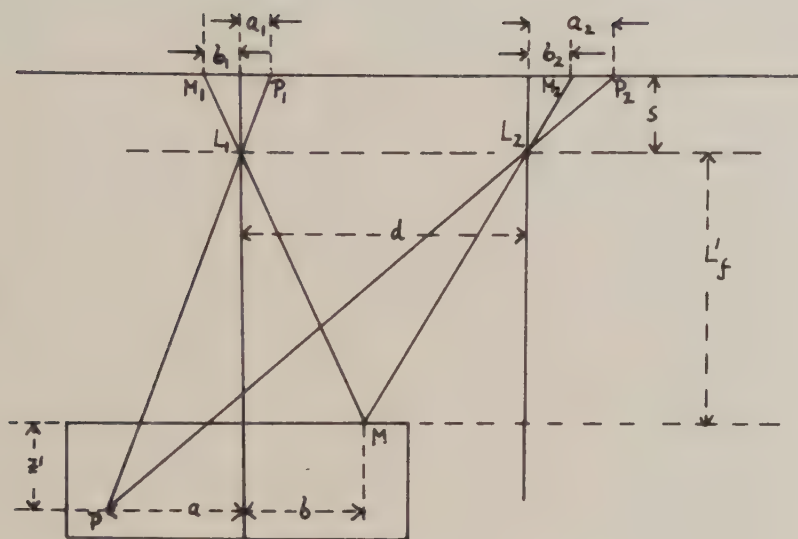


Abb.12: Strahlengang bei der Abbildung auf dem Film

Überlagert man auf dem Film die beiden Abbildungen P_1 und P_2 des Punktes P , dann haben die beiden Abbildungen M_1 und M_2 der Marke M den Abstand

$$\begin{aligned} \delta &= (a_1 + b_1) - (a_2 - b_2) \\ (45) \quad &= sd \left(\frac{1}{L'_f} - \frac{1}{L'_f + z'} \right). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$(46) \quad V_f = V_{MF} \cdot V_{FP} \quad , \quad \text{wobei}$$

$V_f = 0.69 =$ Vergrößerungsverhältnis von Markenebene zum Meßtisch
(V_f kann aus dem bekannten Abstand zweier Orientierungsmarken auf dem Deckglas der Blaskammer und dem auf dem Meßtisch gemessenen Abstand der Abbildungen dieser beiden Marken bestimmt werden),

$V_{MF} = \frac{S}{L'_f}$ Vergrößerungsverhältnis von Markenebene zum Film,

$V_{FP} =$ Vergrößerungsverhältnis von Film zum Meßtisch.

Bei überlagerten Abbildungen des Punktes P auf dem Meßtisch gilt also für den Abstand Δ_f der Abbildungen der Marke M

$$(47) \quad \Delta_f = V_{FP} \cdot \delta = V_f d \left(1 - \frac{L'_f}{L'_f + z} \right).$$

z eines Punktes kann also durch Überlagerung und Messung des Markenabstandes Δ_f bestimmt werden. Es gilt für $z = z'_{n_H}$:

$$(48) \quad z = \frac{\Delta_f}{V_f} \cdot \frac{n_H}{d} \cdot \frac{L'_f}{1 - \frac{\Delta_f}{V_f d}} = \frac{\Delta_f}{V_f} \cdot K(\Delta_f), \text{ wobei}$$

$$(49) \quad K(\Delta_f) = \frac{n_H}{d} \cdot \frac{L'_f}{1 - \frac{\Delta_f}{V_f d}}$$

der "Stereofaktor" genannt wird. K kann auch als Funktion von z ausgedrückt werden (siehe (47)):

$$(50) \quad K(z) = \frac{n_H}{d} \left(L'_f + \frac{z}{n_H} \right).$$

Da $L'_f \gg z$ ist, ändert sich K nur wenig über die vertikale Ausdehnung der Blaskammer (von 3,9 für $z=0$ bis 4,5 für $z=14''$).

Für das Vergrößerungsverhältnis V von einer Ebene mit konstantem z in der Blaskammer zum Meßtisch gilt (Anwendung von (46) und (47)):

$$(51) \quad V = \frac{S}{L'_f + \frac{z}{n_H}} \cdot V_{FP} = V_f - \frac{\Delta_f}{d}.$$

Der Stereofaktor kann auch mit Hilfe des Vergrößerungsverhältnisses V ausgedrückt werden:

$$(52) \quad K(V) = \frac{n_H L'_f}{d} \cdot \frac{V_f}{V} = K_f \cdot \frac{V_f}{V} \quad \text{mit} \quad K_f = \frac{n_H L'_f}{d}.$$

Nach der Herleitung dieser grundlegenden Formeln soll auf die Ausmessung und die Bestimmung der Größen einer erdenden Protonspur eingegangen werden. Im folgenden beziehen sich die gestrichenen Größen auf die Abbildungen des Ereignisses auf dem Meßtisch, während die ungestrichenen Größen sich auf das Ereignis in der Blaskammer

kammer selbst beziehen. Abb.13 zeigt ein Ereignis auf dem Meßtisch, wenn man den Punkt P' der Reaktion in allen drei Abbildungen überlagert hat. Die einklaufende π^- -Spur fällt in allen drei Abbildungen

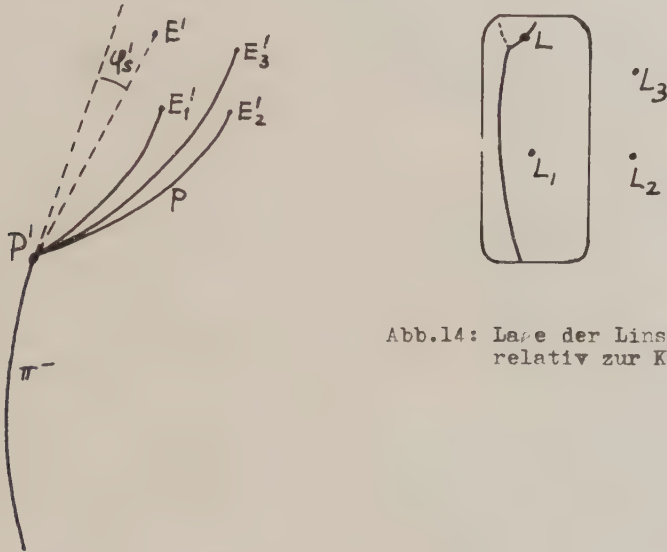


Abb.14: Lage der Linsen
relativ zur Kammer

Abb.13: Ansicht eines Ereignisses

zusammen, da sie flach in der Kammer verläuft. Die auslaufende π^- -Spur, an der keine Messungen vorgenommen wurden, ist nicht mit eingezeichnet. (Die in Abb.13 eingezeichneten Größen werden auf den folgenden Seiten erläutert.)

1. Bestimmung des Neigungswinkels λ der Protonspur.

Der Neigungswinkel λ der Protonspur p ist der Winkel zwischen der Spur und der horizontalen Ebene $z_p = \text{const.}$ (Eigentlich müßte man die Tangente an die Spur am Ereignisort nehmen. Wegen der verhältnismäßig geringen Krümmung einer endenden Protonspur ist der Neigungswinkel der Tangente jedoch praktisch gleich dem Neigungswinkel der Sehne zwischen P und dem Ende E der Spur²⁵). Für λ gilt:

$$(53) \quad \tan \lambda = \frac{z_p - z_E}{s_{\perp}},$$

wobei $s_{\perp}$ die Länge der in die xy-Ebene projizierten Sehne (senkrecht zum Magnetfeld) zwischen P und E ist. Mit Hilfe von (48) und (52)

erhält man

$$(54) \quad \lg \lambda = \frac{K_f}{s_{\perp}} \left(\frac{\Delta_f(z_p)}{V(z_p)} - \frac{\Delta_f(z_E)}{V(z_E)} \right).$$

($\Delta_f(z_E)$ z.B. ist der Markenabstand bei Superposition der Abbildungen des Endpunktes E). Da das Vergrößerungsverhältnis $V(z)$ nur schwach von z abhängt, können $V(z_p)$ und $V(z_E)$ durch einen Mittelwert V für die gesamte Spur ersetzt werden:

$$(55) \quad \lg \lambda = \frac{K_f}{s'} \Delta,$$

wobei $s' = V s_{\perp}$ die Länge der projizierten Sehne auf dem Meßtisch und $\Delta = \overline{E'_1 E'_2} = \overline{E'_2 E'_3}$ ist ($\overline{E'_1 E'_2} = \overline{E'_2 E'_3}$, da die Kammerlinsen L_1 und L_2 den gleichen Abstand von 20" haben wie L_2 und L_3).

2. Messung der projizierten Sehnenlänge s' und des Azimuthwinkels φ'_s der Sehne.

Außer Δ muß zur Bestimmung des Neigungswinkels auch die projizierte Sehnenlänge s' gemessen werden. Da im allgemeinen keine der Blaskammerlinsen L_1, L_2, L_3 genau senkrecht über dem Ereignis steht, kann s' an keiner der 3 sichtbaren Abbildungen der Protonspur gemessen werden. Nach G.R. Lynch²⁴ kann man sich jedoch eine vierte Linse L genau über dem Ereignis denken (Abb.14), die bei Überlagerung das Spurende in der Punkt E' auf dem Meßtisch abbilden würde. Das Viereck (L_1, L_2, L_3, L) ist dabei ähnlich dem Viereck (E'_1, E'_2, E'_3, E'). Daher kann aus der bekannten Stellung der Kammerlinsen relativ zur Kammer, der Lage der Protonspur in der Kammer und den drei sichtbaren Spurenenden E'_1, E'_2, E'_3 der Punkt E' auf dem Meßtisch leicht gefunden werden. s' ist dann gleich $\overline{P'E'}$.

Mit Hilfe des Punktes E' wurde auch der Azimuthwinkel φ'_s der Sehne relativ zur Richtung der einlaufenden Pionspur (Abb.13) gemessen. Aus $\varphi'_s = \varphi_s$ wurde dann (siehe unten) der Azimuthwinkel φ der Protonspur bestimmt.

3. Bestimmung des Protonimpulses p_p .

Aus s' ergibt sich die Länge $s_{\perp}$ der projizierten Sehne in der Kammer mit Hilfe eines mittleren Vergrößerungsverhältnisses V nach

$$(56) \quad s_{\perp} = \frac{s'}{V}.$$

Zur Bestimmung von V nach Formel (51) wurde ungefähr der Mittelpunkt

der Protonspur in zwei Abbildungen überlagert und bei dieser Einstellung der Abstand Δ_f der Orientierungsmarken gemessen.

Für eine flache Spur ($\lambda=0$) ist $s_1 = s$, d.h. gleich der Länge der wirklichen Sehne an die Spur. Es soll jetzt gezeigt werden, daß für nicht zu hohe Protonimpulse s praktisch gleich der Reichweite R des Protons ist, d.h. die Krümmung der Protonspur vernachlässigt werden kann:

In sehr guter Näherung kann eine endende Protonspur des Impulses p_p durch den Abschnitt eines Kreises mit dem zu p_p gehörigen Krümmungsradius

$$(57) \quad t = 3.33 \frac{p_p}{H} \frac{K \text{ Gauss} \cdot \text{cm}}{\text{MeV/c}} = 0.215 p_p \frac{\text{cm}}{\text{MeV/c}}, \text{ für } H = 15.5 \text{ KGauss (S.14)},$$

ersetzt werden. Zwischen Sehnenlänge s und der Reichweite R besteht dann die Beziehung:

$$(58) \quad \sin \frac{R}{2r} = \frac{s}{2r}.$$

R ergibt sich aus der für $p_p < 500 \frac{\text{MeV}}{c}$ gültigen Impuls-Reichweite-Beziehung für Protonen im Wasserstoff:

$$(59) \quad p_p = 142 \cdot R^{0.278} \text{ MeV/c} \cdot \text{cm}^{-0.278},$$

d.h. umgekehrt

$$(60) \quad R = 0.178 \cdot 10^{-7} p_p^{2.6} \text{ cm} (\text{MeV/c})^{-3.6}.$$

Mit Hilfe von (57) und (60) erhält man

$$(61) \quad \frac{R}{2r} = 0.414 \cdot 10^{-7} p_p^{2.6} (\text{MeV/c})^{-2.6}.$$

In diesem Experiment wurden nur Ereignisse mit $p_p < 400 \frac{\text{MeV}}{c}$ benutzt. Für den ungünstigsten Fall $p_p = 400 \frac{\text{MeV}}{c}$ ist $\frac{R}{2r} = 0.238$ nach (61). Daher kann $\sin \frac{R}{2r}$ durch $\frac{R}{2r}$ ersetzt werden, und man erhält mit (58): $R=s$.

Es sei noch erwähnt, daß nach (59) gilt

$$(62) \quad \frac{\Delta p_p}{p_p} = 0.278 \frac{\Delta R}{R},$$

d.h. eine relative Ungenauigkeit in der Reichweite-Bestimmung hat nur einen etwa viermal kleineren relativen Fehler im Impuls zur Folge,

so daß die Impulsbestimmung aus der Reichweite sehr genau ist.

Für eine nicht flache Protonspur ($\lambda > 0$) ist die Sehnenlänge

$$(63) \quad s = \frac{s_L}{\cos \lambda} = \frac{s'}{v \cos \lambda}.$$

Da für diesen Fall der Einfluss des Magnetfeldes auf die Spur geringer ist als für eine flache Spur, die in einer Ebene senkrecht zum Feld verläuft, ist die Näherung $s=R$ noch besser. Mit $R=s$ kann also aus den Meßwerten s' , Δ und Δ_s mit Hilfe der Formeln (51), (55), (59) und (63) der Protonimpuls p_p bestimmt werden.

4. Bestimmung des Azimuthwinkels φ der Spur und des Protonstreuwinkels Θ_p .

Der Azimuthwinkel φ der Protonspur kann nicht direkt gemessen werden, da die zu der gedachten Linse L gehörige Abbildung nicht wirklich existiert. φ kann jedoch aus dem Azimuthwinkel φ_s der Sehne bestimmt werden durch Addition oder Subtraktion eines Winkels $\Delta\varphi$ (Abb.15):

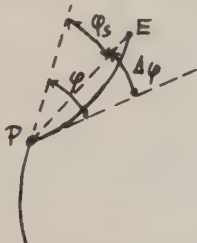


Abb.15: Die projizierten Winkel φ und φ_s

$$(64) \quad \varphi = \varphi_s \pm \Delta\varphi$$

(ob + oder - zu nehmen ist, hängt davon ab, ob der Endpunkt E rechts oder links von der Primärrichtung liegt.) Es ist leicht zu sehen, daß der Korrekturwinkel $\Delta\varphi$ in guter Näherung nicht vom Neigungswinkel λ , sondern nur vom Impuls p_p , d.h. der Reichweite R des Protons abhängt. Ersetzt man die Protonspur durch einen Kreisabschnitt mit dem Radius r , so gilt:

$$(65) \quad \Delta\varphi = \frac{R}{2r}.$$

Die genaue Formel, die die Abhängigkeit des Krümmungsradius $r(R)$ von

der Reichweite berücksichtigt, lautet:

$$(66) \quad \Delta\varphi = \pi \lg \frac{\int_0^R dR' \sin \left(\frac{dR'}{r(R')} \right)}{\int_0^R dR' \cos \left(\frac{dR'}{r(R')} \right)}$$

Durch numerische Integration mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine IBM-650 wurde mit dieser Formel $\Delta\varphi$ als Funktion des Impulses p_0 berechnet und als Kurve aufgetragen, die dann zur Bestimmung des Azimutwinkels φ aus φ_s und p_0 benutzt wurde. Aus λ und φ wurde der Streuwinkel Θ_p des Protons bestimmt:

$$(67) \quad \cos \Theta_p = \cos \lambda \cdot \cos \varphi.$$

5. Zusammenfassung

Die Bestimmung einer Größe aus zwei anderen Größen (λ aus Δ und s' , $s_\perp$ aus s' und Δ_f , p_p aus $s_\perp$ und λ , Θ_p aus λ und φ) wurde mit Hilfe eines Nomogramms durchgeführt. In Abb.16 ist zusammenfassend in einem Schema dargestellt, wie aus den vier gemessenen Größen Δ_f , s' , Δ und φ_s der Protonimpuls p_p und -winkel Θ_p mit Hilfe der 4 obigen Nomogramme und der Kurve $\Delta\varphi(p_0)$ bestimmt wurden. Die in jedem Schritt benutzten Formeln sind mit angegeben.

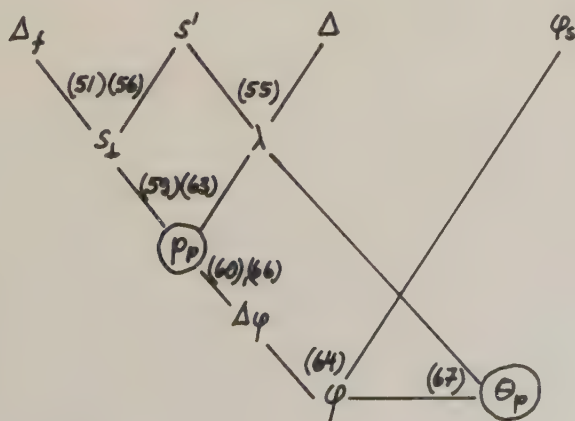


Abb.16: Schematische Darstellung der Auswertung eines Ereignisses

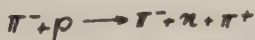
Aus v_0 und θ_0 wurden schließlich für jedes Ereignis die für die Auswertung wichtigen Größen v^2 (Vierer-Impulsübertragung) und ω^2 (gesamte Pionenenergie) nach den Formeln (19) und (20) bestimmt. (Zusammenfassende Beschreibung der praktischen Durchführung der Auswertung in Anhang B, mit Beispielen).

6. Meßgenauigkeit

Um Auskunft über die Genauigkeit der gerade beschriebenen, sehr einfachen und "schnellen" Meßtischmethode zu erhalten, wurden einige Streuereignisse auf dem "Franckenstein"^{18, 26} gemessen und mit Hilfe der in der Alvarez-Gruppe benutzten IBM-704 Programme "Pang" und "Kick"^{18, 27-29} analysiert. Diese Programme geben die Größen eines Ereignisses mit sehr großer Genauigkeit. Der Vergleich ergab, daß in 80 % der Ereignisse der Protonimpuls nach der Meßtisch-Methode um weniger als 3 % und der Protonwinkel θ_0 um weniger als 2° vom "richtigen" Wert abwich. Die größte auftretende Abweichung betrug 5 % für v_0 und 3° für θ_0 . Es wurde keine systematische Abweichung festgestellt. Da θ_0 nur zur Bestimmung von ω^2 benutzt wird und ω^2 nur schwach von θ_0 abhängt (siehe (20)), ist die Genauigkeit der Meßtisch-Methode sehr gut. Auf die große Genauigkeit der Impuls- und damit v^2 -Bestimmung aus der Reichweite wurde schon oben hingewiesen.

7. Unterscheidung zwischen elastischen und unelastischen Ereignissen

Die großen Dimensionen der 72"-Blasenkammer waren von großem Vorteil, da dadurch das Experiment nur auf solche Ereignisse beschränkt werden konnte, in denen das Proton in der Kammer zur Ruhe kam. Dadurch war eine Unterscheidung der hier interessierenden Reaktion von der Reaktion



sofort möglich. Ebenso konnte die interessierende Reaktion von der elastischen Streuung



sofort auf dem Meßtisch unterschieden werden mit Hilfe der folgenden Kriterien, die in der Reihenfolge ihrer Nützlichkeit aufgeführt sind:

1. Wenn die beiden auslaufenden Spuren des π^- und Protons auf derselben Seite der Primär-richtung liegen, oder wenn die eine Spur flach, die andere steil verläuft (nicht kollinear), ist das Ereignis unelastisch.

2. Während bei einem elastischen Ereignis alle Werte für θ_0 möglich sind, ist für die unelastische Reaktion die obere Grenze für θ_0

70° ³⁰ (für den Primärimpuls $1,03 \frac{\text{GeV}}{c}$). Wenn also λ (aus einer schnellen Messung von s' und Δ) oder φ allein größer als 70° waren, so war das Ereignis elastisch. In anderen zweifelhaften Fällen wurde θ_p schnell mit Hilfe der Nomogramme bestimmt und festgestellt, ob es $>70^\circ$ war.

Für $\theta_p < 65^\circ$ ist der Impuls des Protons aus einer elastischen Reaktion $> 450 \frac{\text{MeV}}{c}$. Ereignisse mit einem so großen p_p , erkennbar aus der großen Reichweite, wurden sowieso nicht genommen. (Für $\theta_p < 60^\circ$ kommt ein elastisch gestreutes Proton wegen der großen Reichweite nicht mehr in der Kammer zur Ruhe).

Für den kleinen Bereich zwischen 65° und 70° wurde das Kriterium 3. angewandt, falls das Ereignis nicht sofort aus einer für eine elastische Streuung zu kleinen Protonenreichweite oder aus der Lage und Krümmung der auslaufenden π^- -Spur als unelastisch erkennbar war.

3. Die beiden Meßwerte (θ_π , p_π) liegen für ein elastisches Ereignis auf einer aus der Zweikörperkinematik gegebenen Kurve. Für eine nicht zu steile Protonspur kann θ_π (durch Messung des Azimutwinkels der Tangente an die Spur) und p_π (aus der Reichweite mit Hilfe einer Schablone) schnell ungefähr bestimmt werden. Nur wenn die beiden so erhaltenen Werte einen Punkt in der Nähe der Kurve ergaben, war eine genauere Messung nötig.

4. Für eine flache auslaufende Pionspur kann der π^- -Streuwinkel θ_π durch Messung des Azimutwinkels der Tangente an die Spur und der π^- -Impuls p_π mit Hilfe einer Krümmungsschablone schnell bestimmt werden. Das gemessene Wertepaar (θ_π , p_π) liegt für ein elastisches Ereignis auf einer gegebenen Kurve.

Nach einiger Erfahrung konnte in den allermeisten Fällen die Entscheidung, ob es sich um ein elastisches oder ein unelastisches Ereignis handelte, sofort ohne jede Messung getroffen werden, da ein elastisches Ereignis ein sehr charakteristisches Aussehen hat. Die sehr wenigen wirklich zweifelhaften Ereignisse wurden, wie die unelastischen Ereignisse, genau ausgemessen.

Alle unelastischen Ereignisse wurden als Reaktionen



angesehen, obwohl bei dem vorliegenden Primärimpuls von $1,03 \frac{\text{GeV}}{c}$ die Erzeugung mehrerer Pionen möglich ist. Jedoch ist bei diesem Impuls der Wirkungsquerschnitt für Vielfacherzeugung wesentlich kleiner als für Einfacherzeugung (ca. 10% , siehe ³¹). Daher wurde

die Beimischung von einer Vielfacherzeugung vernachlässigt, da wegen der beschränkten Statistik die statistischen Fehler an den Resultaten sowieso ziemlich groß sind. Wollte man die Vielfacherzeugungen von den Einfacherzeugungen trennen, so müßte man natürlich außer der Protonspur auch die Spur des auslaufenden Pions ausmessen und eine kinematische Analyse des Ereignisses durchführen.

D. Berechnung des Korrekturfaktors³²

1. Einleitung

Da nur Ereignisse mit in der Kammer zur Ruhe kommendem Proton genommen wurden, ist die Auswahl der Ereignisse mit einem systematischen Fehler behaftet. Z.B. ist für ein Proton mit kleinem Impuls die Wahrscheinlichkeit, in der Kammer zur Ruhe zu kommen, größer als für ein Proton mit hohem Impuls. Daher ist für jedes Ereignis ein Gewicht $K \geq 1$ (K = Korrekturfaktor) zu bestimmen, mit dem es in die Statistik einreicht. K hängt ab von der Protonreichweite R und dem Streuwinkel Θ und gibt an, wie viele Ereignisse desselben Types (anstatt eines) gefunden worden wären, wenn die Kammer so groß wäre, daß alle Protonen in ihr zur Ruhe kommen. Man könnte K folgendermaßen für jedes gefundene Ereignis gesondert berechnen aus seiner Lage in der Kammer und aus R und Θ des Protons:

Man stelle sich vor, daß an der Stelle des gefundenen Ereignisses viele Ereignisse auftreten mit demselben R und Θ wie das gefundene Ereignis. Nimmt man gerade Protonspurer an, so liegen die Endpunkte aller Protonen dieser Ereignisse gleichmäßig verteilt (Isotropie um die Primärrichtung) auf einem Kreis mit dem Radius $R \sin \Theta$ um die Richtung des einlaufenden Pions. Der Mittelpunkt des Kreises hat den Abstand $R \cos \Theta$ von der Stelle des Streueignisses. Der Bruchteil derjenigen Ereignisse, bei denen das Proton in der Kammer zur Ruhe kommt und die daher genommen werden, ist gleich demjenigen Bruchteil des ganzen Kreises, der innerhalb der Kammer liegt. Das Reziproke dieses Bruchteils ist daher der Korrekturfaktor für dieses gefundene Ereignis.

So könnte für jedes Ereignis ein Korrekturfaktor gesondert berechnet werden (1. Methode). Jedoch ist die Richtung des primären π^- -Strahls, seine horizontale und vertikale Verteilung und seine Abschwächung durch Reaktionen überall in der Kammer bekannt. Damit ist auch die Verteilung der Ereignisse über die ganze Kammer gege-

ber, und es kann über alle möglichen Stellen in der Kammer integriert werden und ein für allemal ein Korrekturfaktor $K(R, \Theta)$ für alle Ereignisse mit demselben R und Θ berechnet werden. Diese 2. Methode ist schneller und nutzt die genaue Kenntnis über den Teilchenstrahl aus. Der Hauptvorteil dieser Methode aber ist der folgende: In einem "uninstabilen" Falle kann es vorkommen, daß der zu einem genommenen Ereignis gehörige Kreis fast ganz außerhalb der Kammer liegt. Würde man für jedes Ereignis gesondert den Korrekturfaktor bestimmen (1. Methode), so würde dieses (wenig wahrscheinliche) Ereignis mit einem unrealistisch großen Korrekturfaktor in die Statistik eingehen. Dagegen werden solche unrealistischen Folgen von Ausnahmefällen vermieden, wenn man einen über die Kammer gemittelten Korrekturfaktor anwendet (2. Methode).

Zur Berechnung von $K(R, \Theta)$ wurden zwei IBM-704-Programme geschrieben, "COR I" und "COR II". COR I ist für gerade auslaufende Spuren und wurde für nicht zu große Reichweiten R benutzt, während in COR II die Krümmung der Spur im Magnetfeld näherungsweise berücksichtigt wurde. Die beiden Programme sollen nun näher beschrieben werden.

2. Beschreibung von COR I.

Der "sichtbare Teil der Blasenkammer" wird als rechteckiger Kasten mit den Ausmaßen a, b, c in x, y, z -Richtung angenommen (Abb.17). (Definition von "sichtbarer Teil der Blasenkammer": Ein Ereignis wurde genommen, wenn die endende Protonspur ganz innerhalb des "sichtbaren Teils der Blasenkammer" - von jetzt ab einfach Blasen-kammer genannt - lag). Eine Spur des π^- -Strahls mit dem Krümmungsradius ρ möge im Punkte $P_0 = (x_0, y_0 = 0, z_0)$ in die Kammer eintreten unter einem Winkel α_0 zur y -Richtung (Abb.17 und 18, ρ und α_0 sind gleich

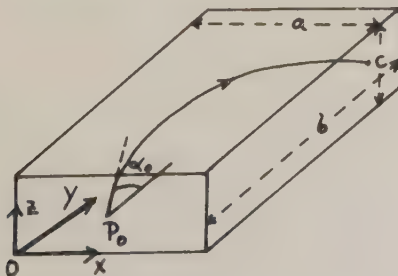


Abb.17: Blasenkammer mit einer Spur

für alle Strahl-Spuren, d.h. der π^- -Strahl wird als parallel in der

Ein Punkt P auf diesem Kreis schließlich hat die Koordinaten (Abb.19):

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (x, y, z) \text{ mit}$$

$$\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3),$$

(68)

$$x_3 = R \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha,$$

$$y_3 = R \sin \theta \cos \varphi \sin \alpha,$$

$$z_3 = R \sin \theta \sin \varphi.$$

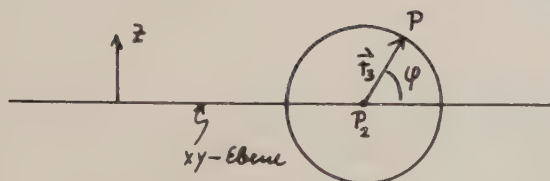


Abb.19: Skizze zur Berechnung des Korrekturfaktors

Dieser Punkt P auf dem Kreise liegt dann und nur dann innerhalb der Blaskammer, wenn die folgenden 3 Ungleichungen alle gleichzeitig erfüllt sind:

$$(69) \quad \begin{aligned} 0 < x < a, \\ 0 < y < b, \\ 0 < z < c. \end{aligned}$$

Für ein gegebenes Wertepaar (R, θ) wird nun der Korrekturfaktor $K(R, \theta)$ durch die folgenden numerischen Integrationen vom COR-Programm bestimmt:

Für einen Punkt P_1 (gegeben durch die Bogenlänge s) auf einer Spur (gegeben durch $P_0 = (x_0, 0, z_0)$) in der Kammer umläuft das Programm in Schritten von $\Delta\varphi$ den zugehörigen Kreis ($\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$), berechnet für jeden Schritt die Koordinaten des zugehörigen Punktes P nach (68) und stellt fest, ob P innerhalb oder außerhalb der Kammer liegt (nach (69)). Für diesen Kreis wird dann der Bruchteil

$$(70) \quad F_1(R, \theta, x_0, z_0, s) = \frac{\varphi_{\text{inn}}}{2\pi} = \frac{\sum_{\text{innerhalb}} \Delta\varphi}{\sum_{\text{alle}} \Delta\varphi}$$

des ganzen Kreises innerhalb der Kammer bestimmt. Dann geht das Pro-

programm in einem Schritt von Δs zum nächsten Punkt auf derselben Spur über und berechnet P_1 für diesen Kreis, usw. Dies wird für die ganze Spur durchgeführt, nämlich von $s=0$ in Schritten von Δs bis zu demjenigen Punkt P_1 , der noch gerade in der Kammer liegt. (Nach jedem neuen Δs -Schritt fragt das Programm zunächst, ob der neue Punkt P_1 innerhalb der Kammer liegt). Für diese Spur wird der Bruchteil

$$(71) \quad F_2(R, \theta, x_0, z_0) = \frac{\sum_i F_1 e^{-\frac{s_i}{\bar{s}}}}{\sum_i e^{-\frac{s_i}{\bar{s}}}}$$

berechnet, wobei die Abschwächung des Strahles durch Wechselwirkungen und π^- -Zerfälle berücksichtigt ist ($\bar{s}$ ist die mittlere freie Weglänge der Strahl-Teilchen in Wasserstoff).

Danach geht das Programm in einem Schritt von Δz_0 zur nächsten Spur mit demselben x_0 über und berechnet, auf dieselbe Weise, P_2 für diese Spur, usw. Dies geschieht in Schritten von Δz_0 für dieses x_0 entlang der gesamten vertikalen Strahl-Verteilung, von $z_0 = z_{\text{omin}}$ bis $z_0 = z_{\text{omax}}$. Für dieses x_0 wird der Bruchteil

$$(72) \quad F_3(R, \theta, x_0) = \frac{\sum_{z_{\text{omin}}}^{z_{\text{omax}}} F_2 e^{-\frac{(z_0 - Z_0)^2}{2\sigma_z^2}}}{\sum_{z_{\text{omin}}}^{z_{\text{omax}}} e^{-\frac{(z_0 - Z_0)^2}{2\sigma_z^2}}}$$

berechnet. Dabei ist die vertikale Strahlverteilung durch eine Gauß-Verteilung um Z_0 mit einer Standard-Abweichung von σ_z beschrieben. Die vertikale Verteilung wurde auf dem Messtisch an vielen Spuren durch Überlagerung von zwei Abbildungen jeder Spur und durch Messung von Δ_f (siehe (48)) bestimmt. Es ergab sich: $Z_0 = 7''$, $\sigma_z = 0.9''$. Die vertikale und horizontale Verteilung war in allen Filmen konstant.

Hierauf geht das Programm in einem Schritt von Δx_0 zum nächsten x_0 über und berechnet P_3 für dieses x_0 . Dies geschieht in Schritten von Δx_0 entlang der gesamten horizontalen Strahlverteilung, von $x_0 = x_{\text{omin}}$ bis $x_0 = x_{\text{omax}}$. Es wird dann der Bruchteil

$$(73) \quad F(R, \theta) = \frac{\sum_{x_{0min}}^{x_{0max}} F_3 e^{-\frac{(x_0 - X_0)^2}{2\sigma_x^2}}}{\sum_{x_{0min}}^{x_{0max}} e^{-\frac{(x_0 - X_0)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

berechnet. Auch die horizontale Verteilung ist durch eine Gauß-Verteilung um X_0 mit einer Weite σ_x beschrieben, die an vielen Strahlspuren auf dem Meßtisch gemessen wurde. Es ergab sich für alle Filme: $X_0 = 5,56''$, $\sigma_x = 2,16''$.

Das Reziproke von $F(R, \theta)$ ist der Korrekturfaktor $K(R, \theta)$ für dieses Paar (R, θ) . $K(R, \theta)$ wurde für alle Streuwinkel θ von $\theta = \theta_{min}$ in Schritten von $\Delta\theta$, bis $\theta = \theta_{max}$ und für alle Reichweiten R von $R = R_{min}$, in Schritten von ΔR , bis $R = R_{max}$ berechnet.

In die Rechenmaschine IBM-704 waren vor Beginn der Rechnung neben dem Programm die Zahlenwerte für die folgenden, oben eingeführten Parameter einzugeben: R_{min} , ΔR , R_{max} , θ_{min} , $\Delta\theta$, θ_{max} , x_{0min} , X_0 , σ_x , Δx_0 , x_{0max} , z_{0min} , z_0 , σ_z , Δz_0 , z_{0max} , Δs , $\bar{s}$, $\Delta\varphi$, φ , α_0 , a , b , c .

3. Beschreibung von COR II (zusätzliche Formeln)

COR II geht im wesentlichen in derselben Weise vor wie COR I. Zusätzlich zu COR I berücksichtigt COR II näherungsweise die Krümmung der auslaufenden Protonspur in der folgenden Weise:

Die einzige Änderung infolge der Krümmung tritt in den Koordinaten x , y des Endpunktes P der Spur auf dem Kreise auf; die z -Koordinate von P ändert sich nicht, da das Magnetfeld in z -Richtung zeigt. Abb. 20 zeigt die Projektion der auslaufenden Spur in die xy -Ebene. P_1 ist die Stelle des Ereignisses, P das Ende der Spur ohne Krümmung, P' mit Krümmung. (x, y) ist also durch (x', y') zu ersetzen. Dazu wird die xy -Projektion der Spur durch den Abschnitt eines Kreises mit dem Radius $\varrho_0 \cos \lambda$ approximiert, wobei

$$(74) \quad \lambda = \arccos \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}$$

der Neigungswinkel und ϱ_0 der Radius eines mittleren Kreises ist, der die endende Spur ersetzt. ϱ_0 wird als fest angenommen, unabhängig von der Reichweite. Diese Approximation ist sehr gut für zur Ruhe kommende Protonen. Da die projizierte Reichweite $R \cos \lambda$ beträgt,

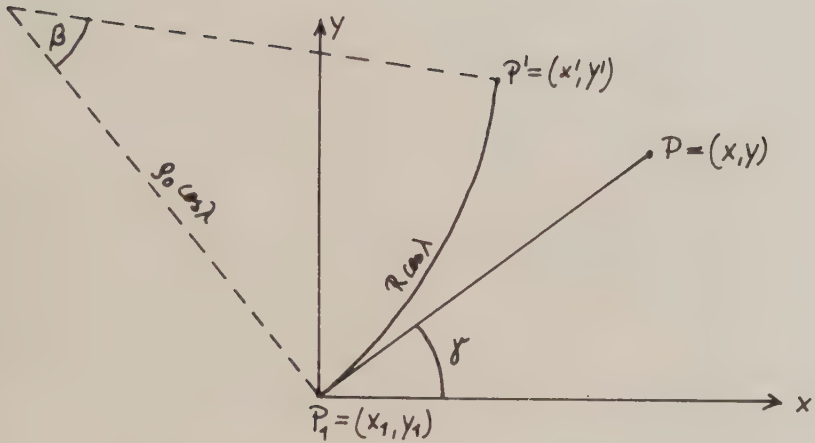


Abb.20: Skizze zur Berechnung des Korrekturfaktor für gekrümmte Spuren

hängt der Winkel β (Abb.20) nicht vom Neigungswinkel ab:

$$(75) \quad \beta = \frac{R \cos \lambda}{g_0 \cos \lambda} = \frac{R}{g_0}.$$

Die Koordinaten (x', y') sind gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + g_0 \cos \lambda [\sin(\beta + \gamma) - \sin \gamma], \\ y' &= y_1 + g_0 \cos \lambda [\cos \gamma - \cos(\beta + \gamma)] \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$(76) \quad \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}, \\ \sin \gamma &= \frac{y - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}. \end{aligned}$$

COR II berechnet (x', y', z) anstatt (x, y, z) und prüft dann nach, ob dieser Punkt innerhalb oder außerhalb der Kammer liegt. Alle anderen Rechnungen verlaufen genau so wie in COR I. Bei Benutzung von COR II ist außer den oben erwähnten, auch von COR I benutzten

Parametern noch der Wert für ϑ_0 in die Rechenmaschine einzugeben.

Mit Hilfe von COR I und COR II wurde die Korrekturfaktoren $K(R, \Theta)$ berechnet und als Kurvenschar in Abhängigkeit vom Protonenimpuls p_p (aus der Reichweite R) mit dem Streuwinkel Θ_p als Parameter aufgetragen. (K ist für festes Θ_p umso größer, je größer R , und für festes R umso größer, je größer Θ_p ist). Für jedes Ereignis wurde dann von dieser graphischen Darstellung mit Hilfe des Paares (p_p, Θ_p) dieses Ereignisses der Korrekturfaktor K abgelesen durch Interpolation zwischen zwei Kurven. Mit K als Gewicht ging das Ereignis in die Statistik ein.

E. Zusammenstellung der Meßwerte

Im Verlauf des Experimentes wurde ungefähr 1100 Ereignisse $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p + \pi^0$ mit Protonimpulsen $p_p < 400 \frac{\text{MeV}}{c}$ auf die oben beschriebene Art analysiert. Zur Anfertigung der zweidimensionalen Verteilung $\frac{\partial^2 N}{\partial p^2 \partial \omega^2}$ im Impulsübertrag p^2 und der gesamten Pionenenergie ω^2 (S. 17) wurde durch Aufteilung des p^2 -Bereiches in Intervalle von $\Delta p^2 = 0,0125 \text{ GeV}^2$ ($c=1$) und des ω^2 -Bereiches in Intervalle von $\Delta \omega^2 = 0,05 \text{ GeV}^2$ der gesamte (p^2, ω^2) -Phasenraum (Abb. 9) in Zellen eingeteilt und jedes Ereignis, charakterisiert durch (p^2, ω^2) , durch seinen Korrekturfaktor in die betreffende Zelle eingetragen. Der Korrekturfaktor eines auf der Grenze liegenden Ereignisses wurde aufgeteilt. Das Ergebnis des Experimentes ist in Tabelle I gegeben. Die erste Zahl in jeder Zelle ist die korrigierte Anzahl $\Delta^2 N$ der Ereignisse, d.h. die Summe der Korrekturfaktoren aller Ereignisse in dieser Zelle. Die Zahl in Klammern ist die Anzahl N der Ereignisse ohne Korrekturfaktor. (Ein auf der Grenze liegendes Ereignis wurde in beiden Intervallen gezählt). N wird zur Berechnung der statistischen Fehler benötigt. Die schraffierten Flächen sind kinematisch verboten. Eine feinere Aufteilung des Phasenraums war nicht zu empfehlen, da n die Zahl der Ereignisse pro Zelle zu klein und die statistischen Fehler zu groß würden. Das Intervall von $p^2=0$ bis $0,0125 \text{ GeV}^2$ wurde nicht genommen, da die Protonspuren dort zu kurz sind. Zu hohen p^2 hin wurde für jedes ω^2 -Intervall die Verteilung abgeschnitten, sobald der mittlere Korrekturfaktor für eine Zelle größer als ungefähr 4 wurde. Die Zellen jenseits dieser oberen p^2 -Grenze sind daher leer in



Tabelle I : Anzahlen der Ereignisse

$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$	0,0125- 0,025 1,03	0,025- 0,0375 1,72	0,0375- 0,05 2,44	0,05- 0,0625 3,09	0,0625- 0,075 3,78	0,075- 0,0875 4,46	0,0875- 0,1 5,15	0,1- 0,1125 5,84	0,1125- 0,125 6,52	0,125- 0,1375 7,21	0,1375- 0,15 7,89	0,15- 0,1625 8,58
0,1-0,15 6,87	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$	2,02 (2) 1,00	11,22 (11) 1,00	8,85 (9) 1,00	7,93 (8) 1,00	8,71 (8) 1,00	10,66 (9) 1,00	8,89 (6) 1,00	20,37 (9) 1,00	22,20 (5) 1,00			
0,15-0,2 9,34	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$	12,09 (12) 1,00	8,16 (8) 1,00	18,61 (19) 1,00	11,58 (12) 1,00	15,17 (14) 1,00	20,12 (22) 1,00	12,32 (9) 1,00	18,89 (9) 1,00	22,80 (9) 1,00			
0,2-0,25 12,36	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$	6,05 (6) 1,09	22,42 (22) 1,00	19,62 (19) 1,00	18,96 (18) 1,00	22,01 (21) 1,00	25,32 (22) 1,00	30,19 (23) 1,00	20,53 (11) 1,00	31,17 (10) 1,00			
0,25-0,3 15,10	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$	5,06 (5) 3,47	10,25 (10) 1,01	22,78 (22) 1,00	21,11 (20) 1,00	22,25 (21) 1,00	27,14 (21) 1,00	21,09 (18) 1,00	22,16 (15) 1,00	22,07 (8) 1,00			
0,3-0,35 17,85	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$		4,08 (4) 2,66	25,83 (25) 1,02	29,37 (28) 1,00	3,74 (22) 1,00	36,22 (23) 1,00	22,44 (19) 1,00	32,38 (24) 1,00	28,96 (15) 1,00	30,00 (9) 1,00		
0,35-0,4 20,60	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$			3,11 (3) 4,39	16,79 (16) 1,20	22,52 (21) 1,00	32,59 (29) 1,00	30,61 (26) 1,00	28,55 (22) 1,00	25,34 (15) 1,00	33,31 (13) 1,00	5,10 (13) 1,00	
0,4-0,45 23,35	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$					13,90 (14) 44,7	28,81 (20) 1,12	36,46 (32) 1,00	37,24 (30) 1,00	34,13 (24) 1,00	29,05 (17) 1,00	28,59 (11) 1,00	21,01 (6) 1,00
0,45-0,5 26,10	$\frac{P^2}{\ln \mu^2}$ $\frac{\omega^2}{\ln \mu^2}$							3,36 (3) 4,17	18,35 (15) 1,71	29,14 (22) 1,17	31,59 (21) 1,00	28,18 (15) 1,00	19,04 (8) 1,00

Tabelle I. Ebenso wurden die Ereignisse mit $\omega^2 < 0,1 \text{ GeV}^2$ nicht genommen. (Der kleinste Wert für ω^2 ist $(2\mu)^2 = 0,078 \text{ GeV}^2$). Da für $\omega^2 > 0,1 \text{ GeV}^2$ $\theta_p < 66^\circ$ ist, bestand die Sicherheit, daß wirklich nur unelastische Ereignisse in die Statistik aufgenommen wurden (S. 40). Ebenso wurden die wenigen Ereignisse mit $\omega^2 > 0,5 \text{ GeV}^2$ nicht genommen, da sie zu weit vom Punkte $p^2 = -\mu^2$, zu dem hin extrapoliert werden muß, entfernt sind (Abb. 9). (Die obere Grenze für ω^2 ist $0,57 \text{ GeV}^2$ für den Primärpuls von $1,03 \frac{\text{GeV}}{c}$).

Besondere Sorgfalt ist natürlich auf diejenigen Zellen zu verwenden, die von der Grenze des Phasenraums durchsetzt werden. Da eine Verteilung $\frac{\Delta^2 \sigma}{\Delta p^2 \Delta \omega^2}$ angefertigt werden soll, wo $\Delta p^2 \Delta \omega^2$ eine Fläche im Phasenraum ist, muß die Zahl der Ereignisse für alle Zellen auf dieselbe Fläche normiert werden. Abb. 21 zeigt den zu kleinen p^2 gehörigen Teil des ganzen, in Abb. 9 dargestellten Phasenraum, seine Einteilung in Zellen und seine untere Begrenzung. Während für eine Zelle, die ganz im Phasenraum liegt, $F_0 = \Delta p^2 \Delta \omega^2 = 0,0125 \cdot 0,05 \text{ GeV}^4 = 0,625 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^4 = 1,89 \mu^4$ ist, ist die Phasenraumfläche für eine Randzelle kleiner. Zur Normierung auf die Fläche $F_0 = 1,89 \mu^4$ muß daher die Zahl $\Delta^2 N'$ der Ereignisse in einer Randzelle mit einem Phasenraumfaktor $\frac{F_0}{F}$ multipliziert werden; F ist der im Phasenraum liegende Teil der Randzelle und wurde für jede Randzelle durch graphische Integration aus Abb. 21 gewonnen. $\frac{F_0}{F}$ ist die untere Zahl in jeder Zelle von Tabelle I. So erhält man für jede Zelle die phasenraumnormierte, korrigierte Anzahl $\Delta^2 N''$ der Ereignisse:

$$(77) \quad \Delta^2 N'' = \frac{F_0}{F} \Delta^2 N'.$$

P. Verfolgte Spurlänge

Um aus der Verteilung $\frac{\Delta^2 N''}{\Delta p^2 \Delta \omega^2}$ der Ereignisse der Wirkungsquerschnitt $\frac{\Delta^2 \sigma}{\Delta p^2 \Delta \omega^2}$ zu erhalten, muß die Gesamtlänge L der während des Durchsuchens der Filme verfolgten π^- -Spuren bekannt sein. Es besteht die Beziehung

$$(78) \quad \Delta^2 \sigma = \frac{1}{nL} \Delta^2 N'',$$

wobei $n = 3,51 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ die Ionen-dichte in der Wasserstoff-Blasen-

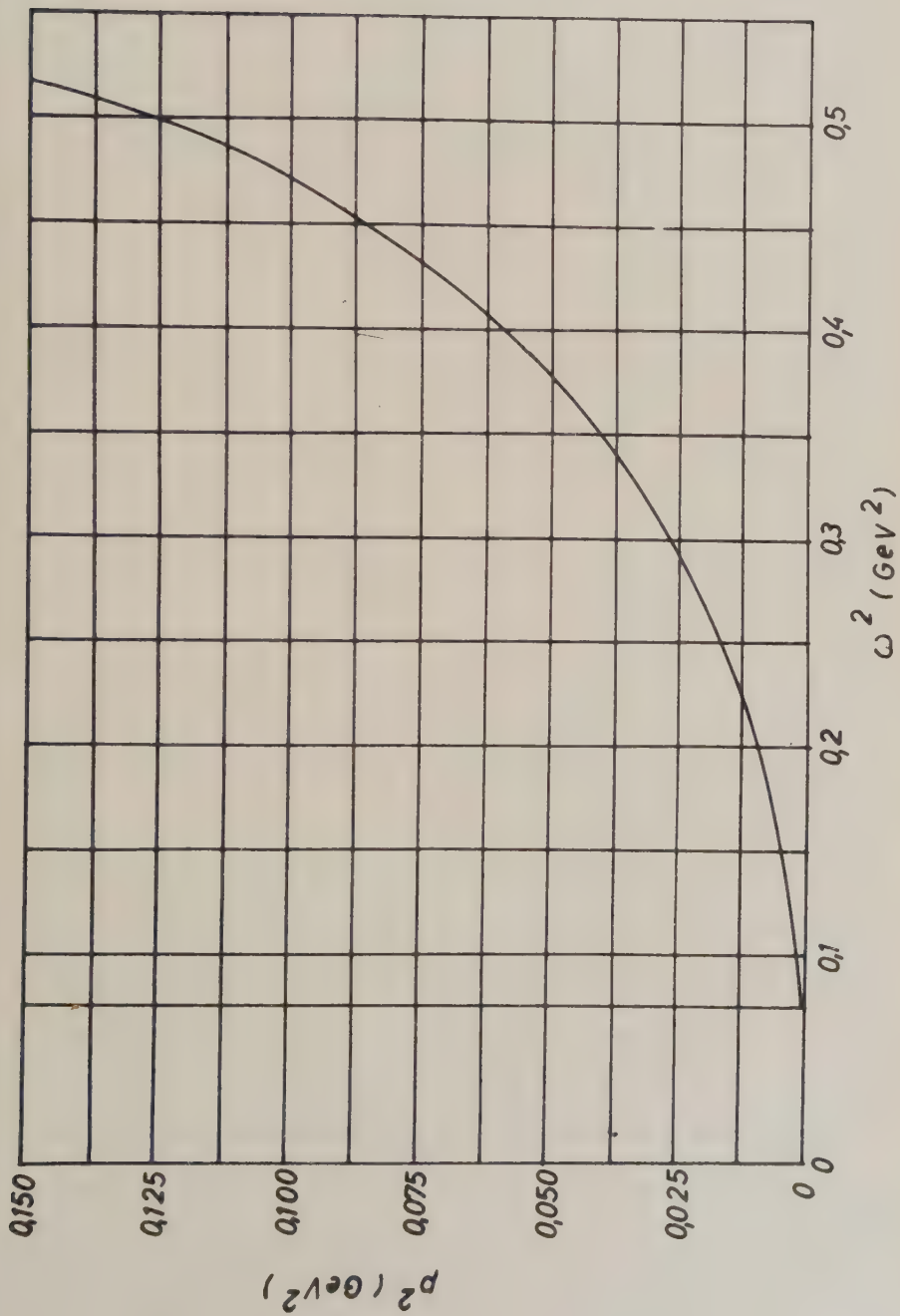


Abb. 21 : Unterer Teil der Phasenräume (p^2, ω^2).

Kammer ist (Dichte des flüssigen Wasserstoffs bei der Expansion:
 $\rho = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$, siehe ³³).

Zur Bestimmung von L wurde zunächst die Länge $l(x_0)$ einer Spur in Abhängigkeit von der Eintrittsstelle x_0 der Spur in die Kammer (S. 43) gemessen (l hängt nicht von z_0 ab). Mit Hilfe der horizontalen Strahlverteilung

$$(79) \quad D(x_0) = C e^{-\frac{(x_0 - X_0)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (S. 47)$$

ergab sich hieraus die mittlere Länge $\bar{l}$ einer Spur nach

$$(80) \quad \bar{l} = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} l(x_0) D(x_0) dx_0}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} D(x_0) dx_0}$$

Das Ergebnis war $\bar{l} = 145 \text{ cm}$.

In elf durch durchmusterten Filmrollen wurden in jedem 20. Bild jeder Rolle die Strahlspuren gezählt. Für jede Rolle ergab sich hieraus und aus der Zahl der durchmusterten Bilder dieser Rolle die Anzahl der verfolgten Spuren. Die Gesamtzahl der verfolgten Spuren in allen elf Rollen war $9,566 \cdot 10^4$. In diesen elf Rollen waren insgesamt 289 Ereignisse mit $p_p < 400 \frac{\text{MeV}}{c}$ gefunden worden. Im Verlauf des gesamten Experiments waren 1086 Ereignisse mit $p_p < 400 \frac{\text{MeV}}{c}$ gefunden worden. Daher betrug die Gesamtzahl aller im Experiment verfolgten Spuren $Z = 3,6 \cdot 10^5$. Die gesamte verfolgte Spurlänge L betrug also

$$L = Z \cdot \bar{l} = 5,21 \cdot 10^7 \text{ cm}.$$

Damit ist der gesuchte Umrechnungsfaktor zwischen Zahl der Ereignisse und Wirkungsquerschnitt gefunden.

III. Auswertung und Diskussion der Ergebnisse

A. Durchführung der Extrapolation und Ergebnisse für $\sigma_{\pi-\pi^0}$.

Wie im Teil II. dieser Arbeit dargestellt wurde, sind die experimentellen Ergebnisse der Tabelle I als p^2 -Verteilung

$$F(p^2, \omega^2) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2 + 1)^2$$

aufzutragen für festes ω^2 (die Pionmasse μ wird von nun an gleich 1 gesetzt, ebenso ist $c=1$ gesetzt). Diese experimentellen Verteilungen sind in den Abb. 22-25 für vier ω^2 -Intervalle zwischen 0,1 GeV² und 0,5 GeV² dargestellt. Durch Zusammenfügen der experimentellen Daten aus 2 bzw. 3 dieser Intervalle (zur Verminderung der statistischen Fehler) wurden die Verteilungen der Abb. 26-28 erhalten.

Diesen Verteilungen ist als theoretischer Ausdruck für $F(p^2, \omega^2)$ ein Polynom nach der Methode der kleinsten Quadrate anzupassen, wie auf Seite 25 diskutiert wurde:

$$(81) \quad F(p^2, \omega^2) = A_0 + A_1 (p^2 + 1) + A_2 (p^2 + 1)^2 + \dots$$

Es sollen zunächst die aus der Ausgleichsrechnung bekannten Formeln zur Berechnung der Koeffizienten des angepaßten Polynoms und ihrer Fehler kurz zusammengestellt werden.

Der Kürze halber werden vorübergehend die folgenden Bezeichnungen benutzt:

$x_v = p_v^2 + 1$	: Wert der unabhängigen Variablen $x = p^2 + 1$ an der Stelle p_v^2 , an der ein Meßwert y_v vorliegt,
$y_v = F(p_v^2, \omega^2)$	: Meßwert an der Stelle p_v^2 ,
$\sigma_v = y_v / \sqrt{n}$	: statistischer Fehler der aus n Ereignissen ermittelten experimentellen Größe y_v ,
n	: Zahl der experimentellen Punkte,
m	: Ordnung des anzupassenden Polynoms $y(x) = \sum_{\mu=0}^m A_\mu x^\mu$.

Bekanntlich besteht die beste Anpassung darin, die Koeffizienten so zu finden, daß die Größe

$$(82) \quad L = \sum_{v=1}^n \frac{[y_v - y(x_v)]^2}{\sigma_v^2} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{\sigma_v^2} \left[y_v - \sum_{\mu=0}^m A_\mu x_v^\mu \right]^2$$

minimal wird. Aus den $m+1$ Bedingungen

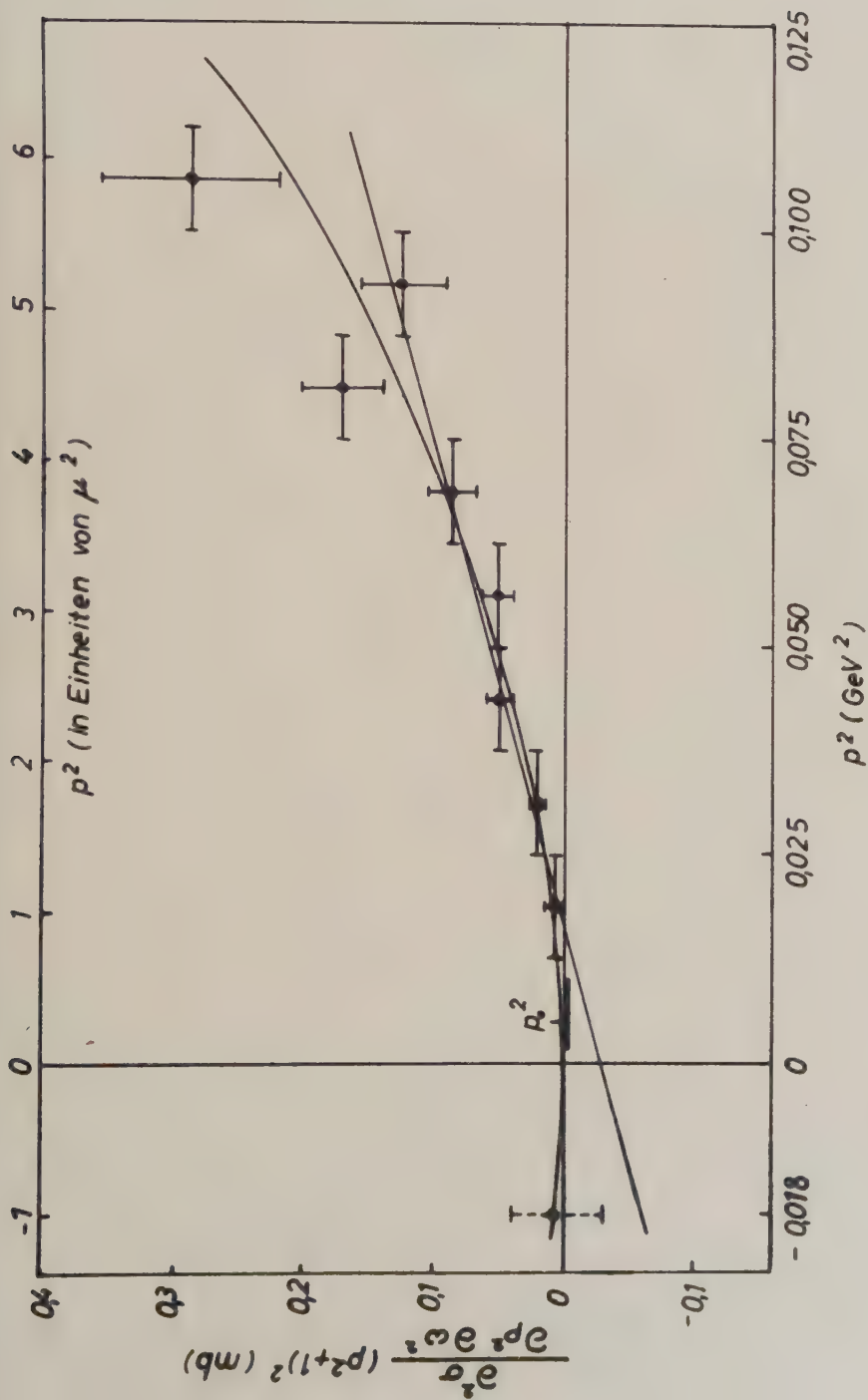


Abb. 22: $\frac{\partial \sigma}{\partial p^2} (p^2+1)^2$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $5,5 \mu^2$ und $11,1 \mu^2$ (p^2 ist die untere Grenze des "hasenraums").

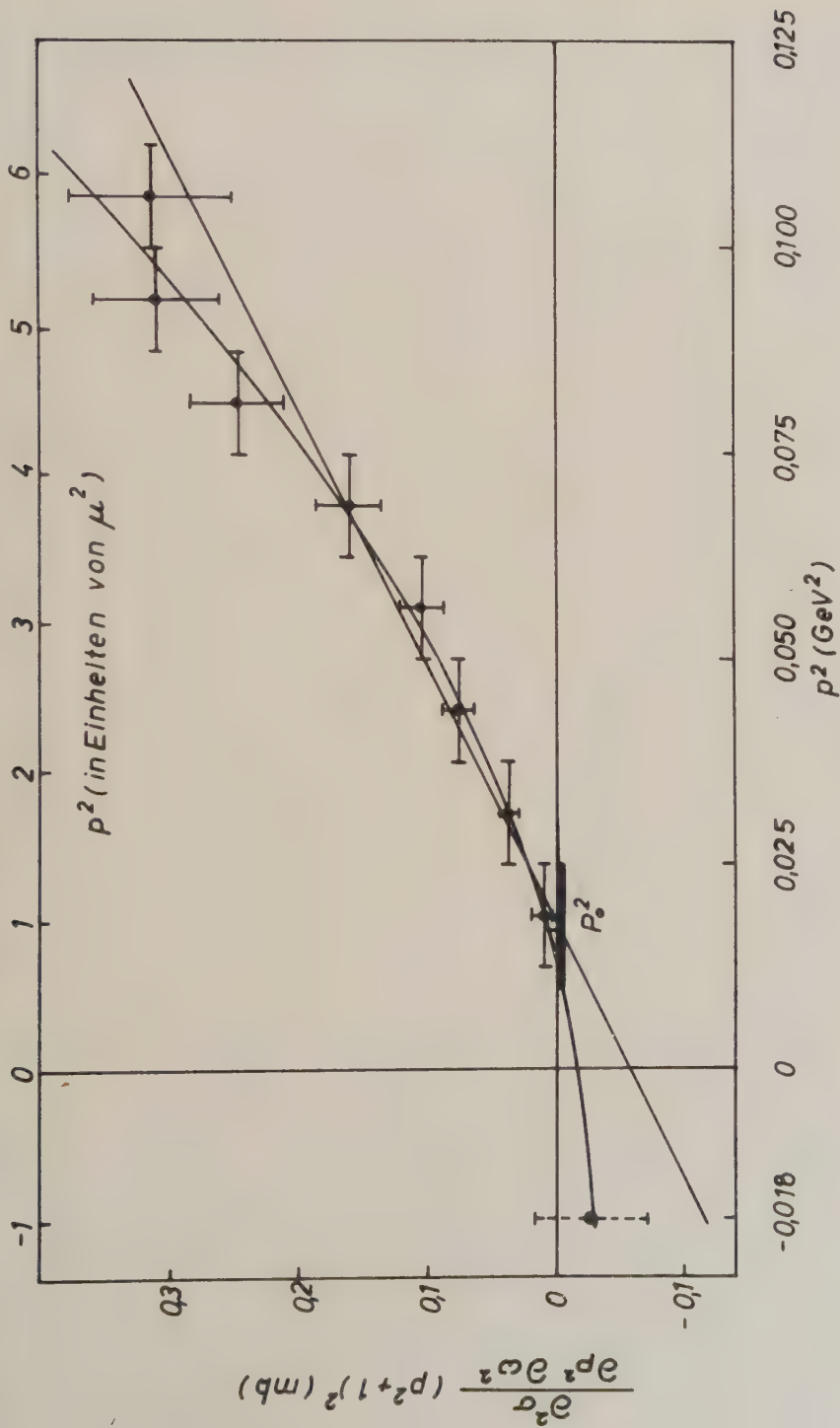


Abb. 23 : $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2+1)^2$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $11,1 \mu^2$ und $16,7 \mu^2$ (p_0^2 ist die untere Grenze des "hasenrraums").

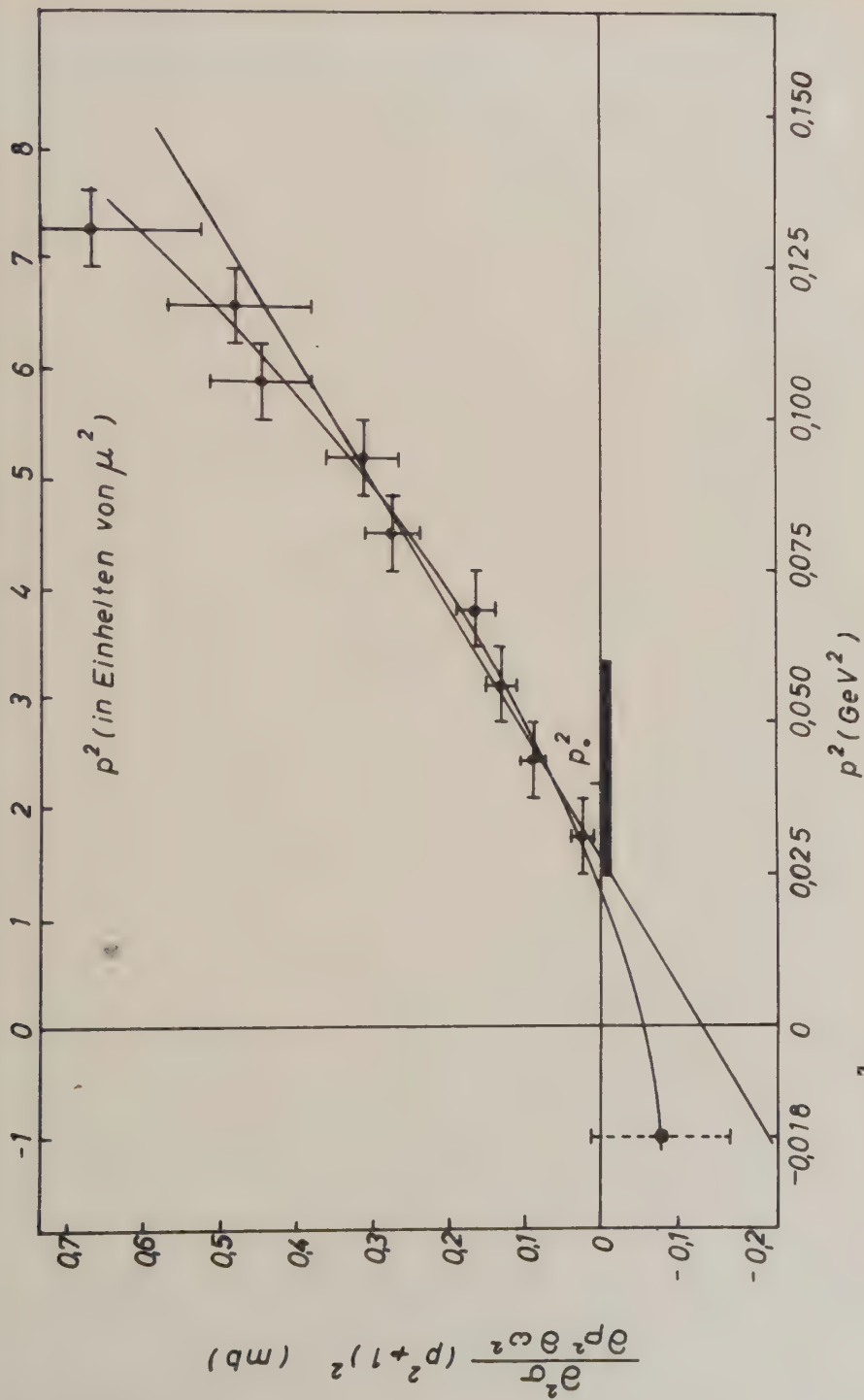


Abb. 24 : $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2+1)^2$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $16,7 \mu^2$ und $22,2 \mu^2$ (p_0^2 ist die untere Grenze des Phasenraums).

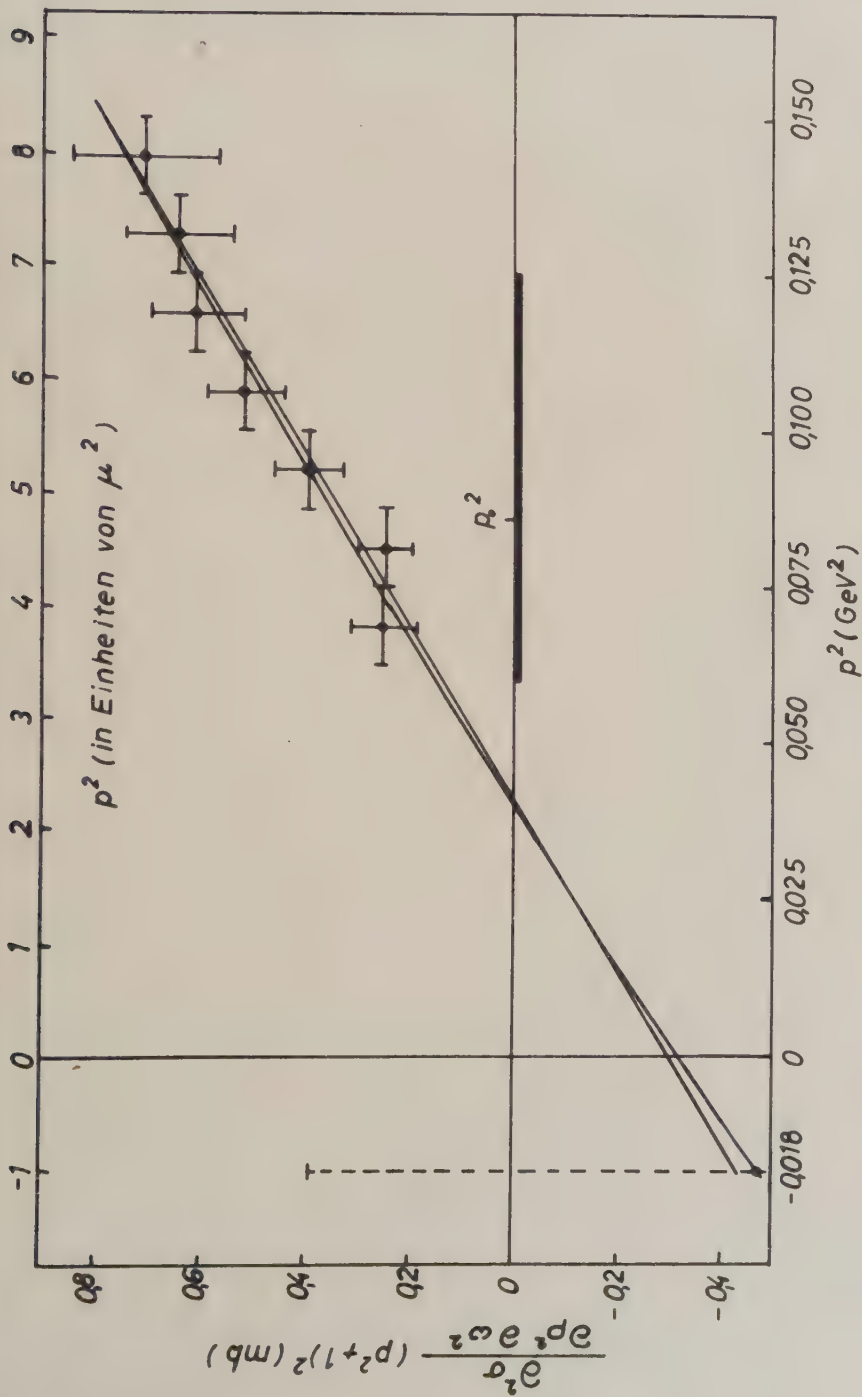


Abb. 25: $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (r^2 + 1)^2$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $2.2 \mu^2$ und $7 \mu^2$ (positiv die untere Grenze des Phasenraums).

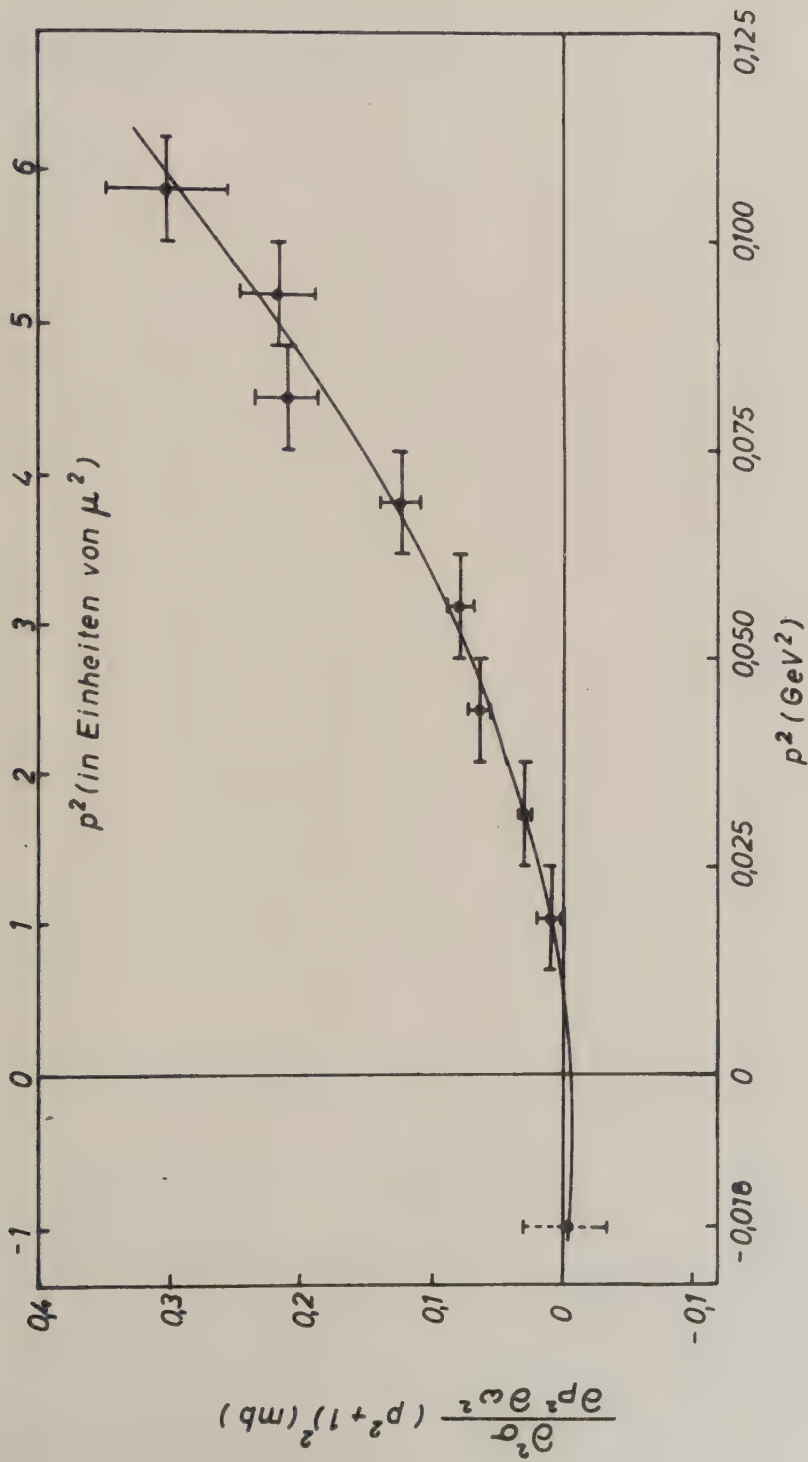


Abb. 26: $(p^2 + 1)^2 \frac{d^2 \sigma}{d p^2 d \omega^2}$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $1,5 \mu^2$ und $16,7 \mu^2$.

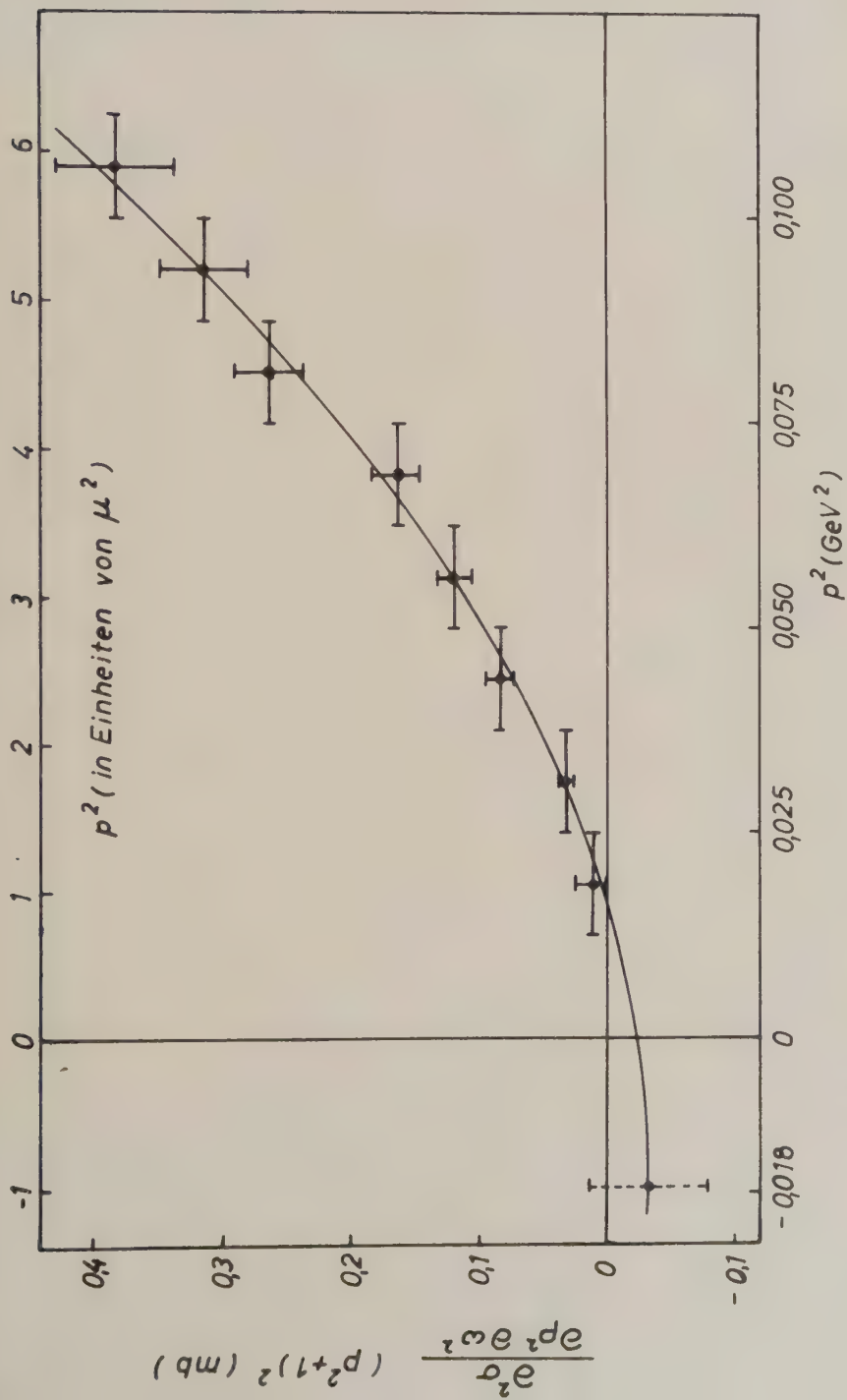


Abb. 27 : $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega}$ in Funktion von p^2 für ω^- zwischen $11,1 \mu^2$ und $22,2 \mu^2$.

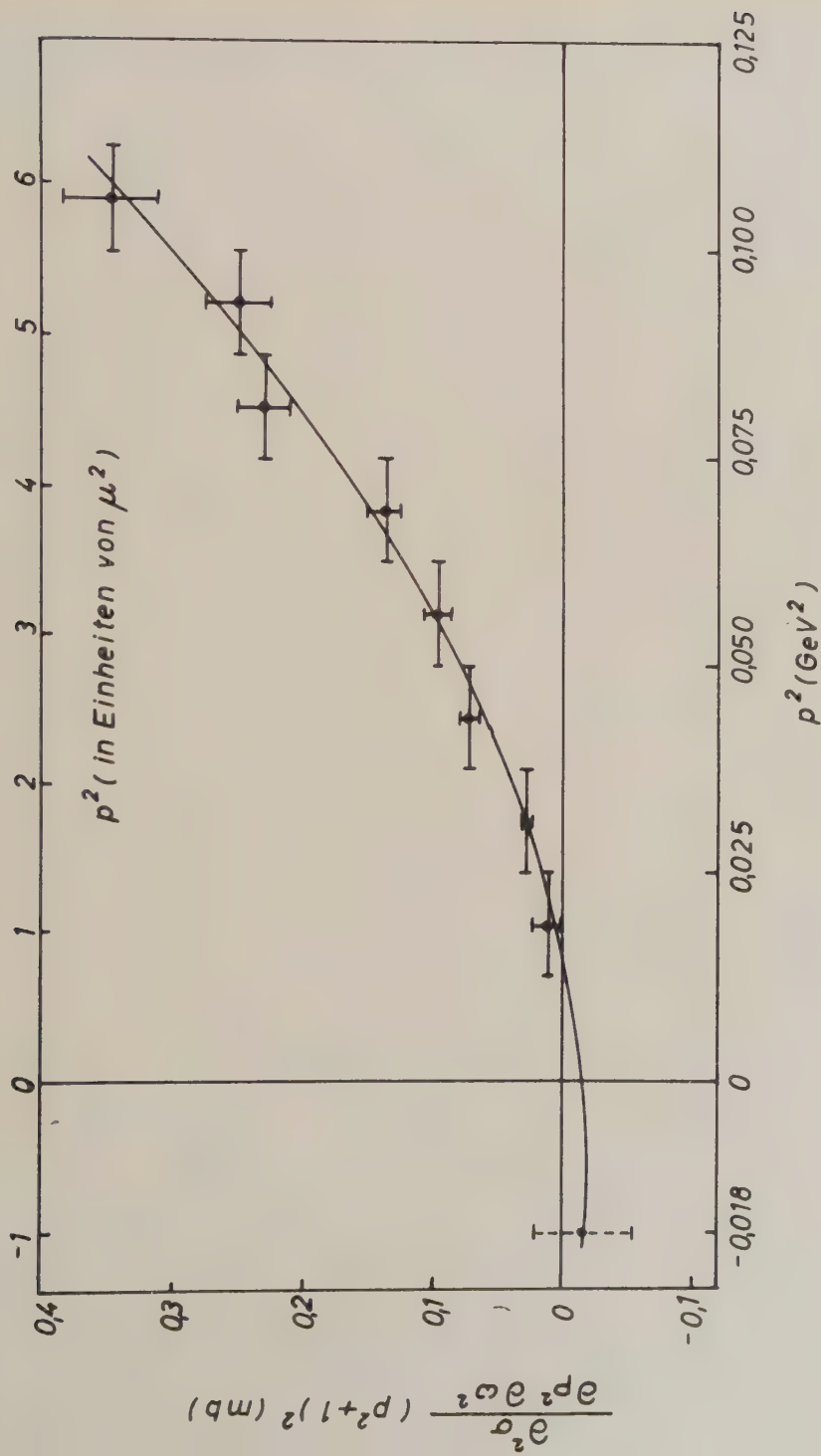


Abb. 28: $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2}$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $5,5 \mu^2$ und $22,2 \mu^2$.

$$(83) \quad \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, m,$$

erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten A_μ das Gleichungssystem

$$(84) \quad \sum_{\mu'=0}^m A_{\mu'} h_{\mu\mu'} = G_\mu,$$

oder in Vektorschreibweise

$$(85) \quad hA = G.$$

Hierbei ist die symmetrische Matrix h gegeben durch die Elemente

$$(86) \quad h_{\mu\mu'} = \sum_{v=1}^n \frac{x_v^\mu x_v^{\mu'}}{\sigma_v^2}$$

und der Vektor G durch die Komponenten

$$(87) \quad G_\mu = \sum_{v=1}^n \frac{y_v x_v^\mu}{\sigma_v^2}.$$

h und G sind durch die experimentellen Punkte bestimmt.

Durch Inversion von (85) erhält man die Gleichung für die angepassten Koeffizienten:

$$(88) \quad A = h^{-1}G$$

oder in Komponenten:

$$(89) \quad A_\mu = \sum_{\mu'=0}^m (h^{-1})_{\mu\mu'} G_{\mu'}.$$

Die für die Koeffizienten sich ergebende Fehlermatrix $\overline{\delta A_\mu \delta A_\nu}$ läßt sich ebenfalls leicht berechnen. Aus (89) folgt:

$$(90) \quad \overline{\delta A_\mu \delta A_\nu} = \sum_{\mu', \nu'=0}^m (h^{-1})_{\mu\mu'} (h^{-1})_{\nu\nu'} \overline{\delta G_{\mu'} \delta G_{\nu'}}.$$

Aus (87) erhält man

$$(91) \quad \overline{\delta G_{\mu'} \delta G_{\nu'}} = \sum_{i,j} \frac{x_i^{\mu'}}{\sigma_i^2} \frac{x_j^{\nu'}}{\sigma_j^2} \overline{\delta y_i \delta y_j}.$$

Dabei gilt

$$(92) \quad \overline{\delta y_i \delta y_j} = \sigma_i^2 \delta_{ij},$$

da die ursprünglichen Meßwerte y_i voneinander unabhängig, d.h. unkorreliert sind (δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol). Mit (86) und (92) erhält man also aus (91):

$$(93) \quad \overline{\delta G_{\mu} \delta G_{\nu}} = \hbar_{\mu\nu}$$

und durch Einsetzen in (90)

$$(94) \quad \overline{\delta A_{\mu} \delta A_{\nu}} = (\hbar^{-1})_{\mu\nu}.$$

Speziell gilt also für das Quadrat des mittleren Fehlers im Koeffizienten A_{μ} :

$$(95) \quad \overline{(\delta A_{\mu})^2} = (\hbar^{-1})_{\mu\mu}.$$

Setzt man die nach (89) berechneten Koeffizienten A_{μ} in (82) ein, so erhält man den Minimalwert für L , der auch χ^2 genannt wird und ein Maß für die Güte der Anpassung ist (χ^2 gibt ja - grob gesprochen - an, wieviel die bestmögliche angepaßte Kurve noch von den experimentellen Punkten abweicht). Aus der Zahl $s=n-(m+1)$ der Freiheitsgrade der Anpassung und der dazugehörigen, a priori bekannten χ^2 -Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schwankungen der experimentellen Punkte um ihren "richtigen" Wert läßt sich die Wahrscheinlichkeit $P_s(>\chi^2)$ dafür angeben, daß die Schwankung größer als das beobachtete χ^2 ist. ($P_s(>\chi^2)$ ist also das Verhältnis der Fläche unter der χ^2 -Verteilung von χ^2 bis ∞ zur Fläche unter der gesamten χ^2 -Verteilung). $P_s(>\chi^2)$ ist die Größe, an der entschieden wird, ob die Anpassung gut ist oder nicht; ist $P_s(>\chi^2)$ z.B. nur 1 %, so ist es sehr unwahrscheinlich, daß die angepaßte Kurve die richtige Kurve ist, da, wie es " $P_s(>\chi^2)=1\%$ " ausdrückt, es sehr unwahrscheinlich ist, daß die experimentellen Werte so stark von ihrem richtigen Wert abweichen. $P_s(>\chi^2)$ kann aus Tabellen in Lehrbüchern über Statistik entnommen werden (siehe z.B. ³⁴).

Die numerische Durchführung der Anpassung von Polynomen an die experimentellen Verteilungen der Abb.22-28 nach Formel (89) und (95) wurde mit Hilfe eines IBM-704 Programms durchgeführt (siehe Anhang B). An jede der 7 Verteilungen wurde der Reihe nach ein Polynom 0-ter, 1., 2., 5. Ordnung angepaßt. Außer den Koeffizienten (89) und ihren Fehlern (95) wurde für jede Anpassung noch die Größe χ^2 und aus dem ersten Koeffizienten A_0 und seinem Fehler der $\pi^- \pi^0$ -Wirkungsquerschnitt mit seinem Fehler nach Formel (16) und (38) berechnet. (Für jedes ω^2 -Intervall wurde als ω^2 -Wert, der in Formel (16) eingeht, der Mittelwert aus den beiden Intervallgrenzen genommen. Dies ist sicherlich gut für die 4 kleinen Intervalle der Abb.22-25. Für die Abb.26 und 27 und besonders für Abb.28 ist es

fraglich, ob man bei der Berechnung eines mittleren $\sigma_{\pi-\pi^0}$ für ω^2 einfach den Mittelwert des Intervalls nehmen darf. Da jedoch die Fehler an den Werten für $\sigma_{\pi-\pi^0}$ sowieso relativ groß sind und bei weitem die durch die Unsicherheit in der Wahl von ω^2 auftretende Ungenauigkeit übertreffen, ist es sicherlich gut genug, auch bei den größeren Intervallen den Mittelwert zu nehmen).

In Tabelle II sind die Ergebnisse für die Koeffizienten A_μ zusammengestellt für die Anpassung durch ein Polynom 1., 2. und 3. Ordnung. Außer den Koeffizienten ist auch die Größe χ^2 und die Wahrscheinlichkeit $P_g(>\chi^2)$ für jede Anpassung eingetragen. Die Ergebnisse aus der Anpassung durch ein Polynom 0-ter Ordnung, also eine horizontale Gerade, sind nicht aufgeführt, da man an den Abbildungen sofort sieht, daß dies nicht als gute Anpassung in Frage kommt. Auch die Ergebnisse für Ordnungen größer als 3 sind nicht gegeben, da die Fehler in den Koeffizienten für diese höheren Ordnungen zu groß werden und keine Aussagen mehr gemacht werden können. (Über die höheren Ordnungen siehe S. 26).

Die angepaßten Polynome 1. und 2. Ordnung sind in den Abb. 22-25 als Kurven eingetragen. In den Abb. 26-28 sind nur die Polynome 2. Ordnung eingezeichnet aus Gründen, die im folgenden diskutiert werden.

Wie die Werte für $P_g(>\chi^2)$ in der Tabelle zeigen, scheidet auch die lineare Anpassung als gute Anpassung aus. Zwar läßt sich dies noch nicht mit Sicherheit aus den $P_g(>\chi^2)$ -Werten in den vier ersten, zu den Abb. 22-25 gehörigen Spalten schließen, jedoch zeigen die Werte 3 % und 1,5 % in den Spalten 5 und 7, die wegen der Zusammenfassung von ω^2 -Intervallen zu einer größeren experimentellen Statistik gehören, daß ein lineares Polynom mit ziemlicher Sicherheit nicht als gute Anpassung in Frage kommt. (Die Zusammenfassung der Daten von zwei bzw. drei ω^2 -Intervallen zur Verringerung der statistischen Fehler wurde gerade vorgenommen, um diese Entscheidung über die lineare Anpassung treffen zu können) Dieses wichtige Ergebnis stimmt überein mit zwei anderen Gründen, die gegen das lineare Polynom sprechen:

1. Es wird sich herausstellen (S. 62), daß andere Beiträge zur Streuamplitude neben dem Ein-Pion-Austausch bedeutend sind. Wie in den theoretischen Überlegungen auf S. 27 ausgeführt wurde, erwartet man in diesem Fall, daß das passende Polynom von zumindest 2. Ordnung ist.

Tabelle II
Koeffizienten der angepaßten Polynome

Ordnung des Polynoms	χ^2 (in Einh. von μ^2) Zahl d. exp. Punkte	5,5-11,1	11,1-16,7	16,7-22,2	22,2-27,8	5,5-16,7	11,1-22,2	5,5-22,2
		8	8	9	7	8	8	8
1	$\chi^2, P_B(>\chi^2)$	11 , 7%	6,7 , 35%	5,2 , 60%	2,0 , 85%	13 , 3%	11 , 8%	16 , 1,5%
	$A_0(\text{mb})$	-0,060 $\pm$ 0,012	-0,117 $\pm$ 0,015	-0,220 $\pm$ 0,028	-0,423 $\pm$ 0,155	-0,098 $\pm$ 0,011	-0,158 $\pm$ 0,041	-0,132 $\pm$ 0,041
	$A_1(\text{mb})$	0,031 $\pm$ 0,004	0,059 $\pm$ 0,005	0,088 $\pm$ 0,007	0,132 $\pm$ 0,024	0,048 $\pm$ 0,004	0,071 $\pm$ 0,004	0,060 $\pm$ 0,003
2	$\chi^2, P_B(>\chi^2)$	7,3 , 20%	1,8 , 87%	2,6 , 85%	2,0 , 75%	4,4 , 50%	3,1 , 70%	5,7 , 35%
	$A_0(\text{mb})$	0,005 $\pm$ 0,035	-0,027 $\pm$ 0,044	-0,081 $\pm$ 0,090	-0,483 $\pm$ 0,877	-0,003 $\pm$ 0,034	-0,032 $\pm$ 0,046	-0,018 $\pm$ 0,037
	$A_1(\text{mb})$	-0,009 $\pm$ 0,021	0,003 $\pm$ 0,026	0,019 $\pm$ 0,044	0,150 $\pm$ 0,272	-0,008 $\pm$ 0,019	-0,001 $\pm$ 0,025	-0,005 $\pm$ 0,020
	$A_2(\text{mb})$	0,006 $\pm$ 0,003	0,008 $\pm$ 0,004	0,008 $\pm$ 0,005	-0,001 $\pm$ 0,020	0,008 $\pm$ 0,003	0,009 $\pm$ 0,003	0,008 $\pm$ 0,003
3	$\chi^2, P_B(>\chi^2)$	6,9 , 15%	1,7 , 80%	2,0 , 85%	1,2 , 75%	4,3 , 35%	2,8 , 60%	5,7 , 20%
	$A_0(\text{mb})$	-0,061 $\pm$ 0,104	0,006 $\pm$ 0,127	-0,336 $\pm$ 0,323	0,040 $\pm$ 0,050	-0,038 $\pm$ 0,095	0,013 $\pm$ 0,130	-0,010 $\pm$ 0,107
	$A_1(\text{mb})$	0,051 $\pm$ 0,091	-0,027 $\pm$ 0,111	0,202 $\pm$ 0,226	-0,021 $\pm$ 0,023	0,022 $\pm$ 0,081	-0,039 $\pm$ 0,106	-0,011 $\pm$ 0,085
	$A_2(\text{mb})$	-0,011 $\pm$ 0,025	0,016 $\pm$ 0,030	-0,033 $\pm$ 0,049	0,332 $\pm$ 0,355	-0,001 $\pm$ 0,022	0,020 $\pm$ 0,027	0,010 $\pm$ 0,022
	$A_3(\text{mb})$	0,001 $\pm$ 0,002	-0,001 $\pm$ 0,003	0,003 $\pm$ 0,003	-0,016 $\pm$ 0,018	0,001 $\pm$ 0,002	-0,001 $\pm$ 0,002	0,000 $\pm$ 0,002

zeichnet einschließlich des extrapolierten Stückes bis zum Pol $p^2 = -\mu^2 = -0,018 \text{ GeV}^2$. Die durch die Fehler in den Meßpunkten bedingte Ungenauigkeit im Werte Λ_0 der Kurve am Pol ist ebenfalls eingezeichnet; aus ihr ergibt sich sofort der Fehler im Wirkungsquerschnitt nach (16).

Für die sieben ω^2 -Intervalle sind in Tabelle III die experimentellen Werte für den $\pi^- \pi^0$ -Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ aufgeführt, die aus der quadratischen Anpassung erhalten wurden. Diese Werte sollen nach den obigen Überlegungen als die physikalisch wahren Werte für $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ betrachtet werden. Der $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ -Wert für das vierte ω^2 -Intervall (Abb. 25) ist natürlich ungenau und mit einem großen Fehler behaftet, da für dieses ω^2 über ein relativ großes Stück zu extrapolieren ist (Abb. 21). Die Daten in diesem ω^2 -Intervall wurden daher auch nicht zur Berechnung des in der 7. Spalte angegebenen mittleren $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ benutzt.

Tabelle III

$\omega^2 (\text{in } \mu^2)$	5.5-11.1	11.1-16.7	16.7-22.2	22.2-27.8	5.5-16.7	11.1-22.2	5.5-22.2 (Mittelwert)
$\sigma_{\pi^- \pi^0} (\text{mb})$	81 ± 55	21 ± 34	43 ± 48	195 ± 355	3 ± 35	21 ± 29	14 ± 29

Wie man sieht, sind die Fehler an den Werten für $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ ziemlich groß, und die Werte sind auch mit einem sehr kleinen Wirkungsquerschnitt verträglich. Auch über die Energieabhängigkeit von $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ kann noch nichts Bestimmtes ausgesagt werden, obwohl ein Anstieg mit der Energie angedeutet zu sein scheint. Man braucht eben wegen der Extrapolation eine außerordentlich große Anzahl von Ereignissen, damit die Fehler in $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ genügend klein werden. Als wertvolles Ergebnis geben die hier gefundenen Werte jedoch eine gute obere Grenze für $\sigma_{\pi^- \pi^0}$. Dieses Ergebnis kann mit einer theoretischen Voraussage über den $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt verglichen werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll.

B. Vergleich der Ergebnisse mit theoretischen Voraussagen zur $\pi\pi$ -Wechselwirkung

Aus theoretischen Berechnungen zur elektromagnetischen Struktur (elm.Str.) des Nukleons mit Hilfe von Dispersionsrelationen ist von Frazer und Fulco^{35,36} eine Resonanz im $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt voraus-

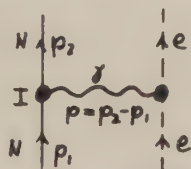
gesagt worden. Es kann hier nicht auf die gesamte Theorie der elm.Str. des Nukleons ausführlich eingegangen werden (siehe gute Darstellung in^{19,37}), jedoch sollen die Grundgedanken und die Beziehungen der elm.Str. zur $\pi\pi$ -Wechselwirkung kurz dargestellt werden.

Aus den Stanford-Experimenten³⁸ zur Nukleon-Elektron-Streuung



ist bekannt, daß das Nukleon eine Ladungsdichte- und Stromdichte-verteilung (elm.Str.) besitzt, die einer Wolke von virtuellen Pionen um den Nukleonkern zugeschrieben wird. (Die relativ große Ausdehnung der Verteilungen, die auch "Radius des Nukleons" genannt wird, stimmt nach der Unschärferelation quantitativ mit der Pion-Masse überein). Die Stromdichte-Verteilung der Wolke gibt natürlich sofort eine Verteilung des anomalen magnetischen Moments μ_N des Nukleons.

Die obige Reaktion der N-e-Streuung wird dargestellt durch den Graphen



Der linke Vertex I des Graphen, die elm.Str. des Nukleons, wird im Isospinformalismus für das Nukleon beschrieben durch 4 reelle Vertex-Funktionen $G_1^S(p^2)$, $G_1^V(p^2)$, $G_2^S(p^2)$ und $G_2^V(p^2)$ ³⁷ des relativistisch invarianten Impulsübertrags $p^2 = (p_2 - p_1)^2$; diese Funktionen wurden im Stanford-Experiment gemessen. Dabei sind die beiden Funktionen $G_1^S(p^2)$ Skalare (S) im Isospinraum, während sich die beiden anderen $G_1^V(p^2)$ wie die 3. Komponente eines Isektors (V) transformieren, also für Proton positives, für Neutron negatives Vorzeichen haben. Die beiden Funktionen mit dem Index 1 gehören zur elektrischen Ladung, ihre ortsabhängigen Fourier-Transformierten können als Skalarteil bzw. Vektorteil der Ladungsdichte aufgefaßt werden. Ebenso gehören die beiden Funktionen mit dem Index 2 zum Betrag μ_N des anomalen magnetischen Moments, ihre Fourier-Transformierten können als Skalar- bzw. Vektorteil der Dichte des anomalen magnetischen Moments des Nukleons gedeutet werden. Demnach sind die Gesamtladung Q und das gesamte anomale magnetische Moment von Proton und Neutron gegeben durch die Werte der G-Funktionen an der Stelle $p^2=0$ (Photon auf seiner "Massenschale"):

$$(96) \quad \begin{aligned} G_1^S(0) + G_1^V(0) &= Q_p = e, & G_2^S(0) + G_2^V(0) &= \mu_p = 1.79 \mu_K, \\ G_1^S(0) - G_1^V(0) &= Q_n = 0, & G_2^S(0) - G_2^V(0) &= \mu_n = -1.91 \mu_K. \end{aligned}$$

(μ_K = Kernmagneton). Hieraus sieht man, daß das normale magnetische Moment des Nukleons fast ganz durch den Vektorteil gegeben und $G_2^S \approx 0$ für kleine p^2 ist, während bei der Ladung Skalar- und Vektorteil ungefähr gleich groß sind. Es wird sich unten zeigen, daß die Vektor-Funktionen $G_1^V(p^2)$ viel leichter durch Dispersionsrelationen zugänglich sind und theoretisch berechnet werden können als die Skalar-Funktionen $G_1^S(p^2)$. Die Größe, die theoretisch verstanden werden kann, ist daher die Verteilung des magnetischen Moments, während die Ladungsverteilung noch nicht gut berechnet werden kann.

Um die Struktur, also die p^2 -Abhängigkeit des $NN\gamma$ -Vertex I untersuchen zu können, sind die vier Vertexfunktionen $G_1^{S,V}(p^2)$ als Dispersionsrelationen beschrieben worden³⁷, in denen ja die Beiträge verschiedener Elementarprozesse zum Vertex I explizit ausgedrückt sind. Während im physikalischen Gebiet $p^2 > 0$ ist, kommen die Beiträge zu den G-Funktionen von Verzweigungsschnitten längs der negativen reellen Achse in der komplexen p^2 -Ebene (vgl. Analogie zu Formel (42) und Abb.10). Der dem physikalischen Gebiet nächste und daher wichtigste Verzweigungsschnitt geht von $-(2\mu)^2$ bis $-\infty$ und entspricht dem Austausch zweier Pionen zwischen Nukleon und γ -Quant, liefert also den Beitrag

$$(97) \quad \begin{array}{c} \text{M} \\ | \\ \text{A} \text{---} \text{B} \\ | \quad \text{---} \gamma \\ \text{N} \end{array}$$

zum Vertex I. Der nächste Beitrag stammt vom Austausch von drei Pionen, entsprechend einem Verzweigungsschnitt von $-(3\mu)^2$ bis $-\infty$, usw.. Aus den bekannten Quantenzahlen des γ -Quants und den Erhaltungssätzen folgt³⁷, daß zu der Vektor-Funktion G_1^V nur Austauschprozesse mit einer geraden Anzahl von Pionen, zu den Skalar-Funktionen G_1^S nur Austauschprozesse mit einer ungeraden Anzahl von Pionen beitragen. Bisher ist als einfachster Fall nur der Austausch (97) zweier Pionen behandelt und in dieser Näherung, d.h. unter Vernachlässigung der Austausche von 4, 6, ... Pionen^{35,36}, die Funktionen $G_1^{S,V}(p^2)$ berechnet worden. Die Skalarfunktionen $G_1^S(p^2)$ sind noch nicht quantitativ berechnet worden, da schon der Austausch von drei Pionen theoretisch schwer zugänglich ist.

Frazer und Pulco^{35,36} haben also $G_1^V(p^2)$ und damit (nach dem oben Gesagten) die Verteilung des anomalen magnetischen Moments des Nukleons berechnet in der Näherung, daß nur der Graph (97) beiträgt. Die Grundgedanken der Rechnung sind die folgenden: Der Vertex A des Graphen (97) ist gegeben durch die bekannte Amplitude für $\pi\pi$ -Streuung (allerdings im unphysikalischen Gebiet); der Vertex B ist die elektromagnetische Struktur des Pions und steht in enger Beziehung zur Amplitude für $\pi\pi$ -Streuung (siehe Formel (11) in³⁵). Es läßt sich also eine Beziehung aufstellen zwischen der Verteilung des anomalen magnetischen Moments und der Amplitude für $\pi\pi$ -Streuung. Das wichtige Ergebnis der Berechnungen von Frazer und Pulco war: Der Vektorteil der in Stanford gemessenen elm.Str. des Nukleons konnte quantitativ berechnet werden, wenn man für die $\pi\pi$ -Streuung eine starke Resonanz bei $\omega^2 \approx (3,5\mu)^2$ mit der Weite $\Gamma = 0,4\mu$ im Zustand $J=1, T=1$ annahm. (Da das ρ -Quant den Spin 1 hat, muß der gesamte Drehimpuls J der beiden Pionen in (97) auch 1 sein. Da außerdem die Gesamtzustandsfunktion der beiden Pionen symmetrisch sein muß, folgt aus $J=1$ der Isospin $T=1$). Frazer und Pulco konnten den Wirkungsquerschnitt $\sigma_1(\omega^2)$ für $\pi\pi$ -Streuung im Zustand $T=1, J=1$ quantitativ als Funktion der Gesamtenergie ω^2 im Schwerpunktsystem vorhersagen (Abb.29).

Bevor die theoretische Voraussage mit den Ergebnissen dieses Experiments verglichen wird, sollen die Beziehungen aufgeführt werden, die zwischen den Streuamplituden A_T für $\pi\pi$ -Streuung in den Isospinzuständen $T=0,1,2$ und den Streuamplituden $A_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^+\pi^-}$ für die $\pi\pi$ -Streuung in definierten Ladungszuständen bestehen:

$$\begin{aligned}
 (98a) \quad & A_{\pi^+\pi^+\rightarrow\pi^+\pi^+} = A_2, \\
 (98b) \quad & A_{\pi^+\pi^0\rightarrow\pi^+\pi^0} = \frac{A_2}{2} + \frac{A_1}{2}, \\
 (98c) \quad & A_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^+\pi^-} = \frac{A_2}{6} + \frac{A_1}{2} + \frac{A_0}{3}, \\
 (98d) \quad & A_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0} = \frac{A_2}{3} - \frac{A_0}{3}.
 \end{aligned}$$

Die Beziehungen lassen sich natürlich leicht mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten herleiten. Falls eine starke $\pi\pi$ -Resonanz für $T=1$ existiert, ist es vernünftig, die anderen Isospinzustände $T=0,2$ zu vernachlässigen. Es gilt dann in dieser Näherung nach (98c):

$$(99) \quad \sigma_{\pi^+\pi^-} = \frac{1}{4} \sigma_1.$$

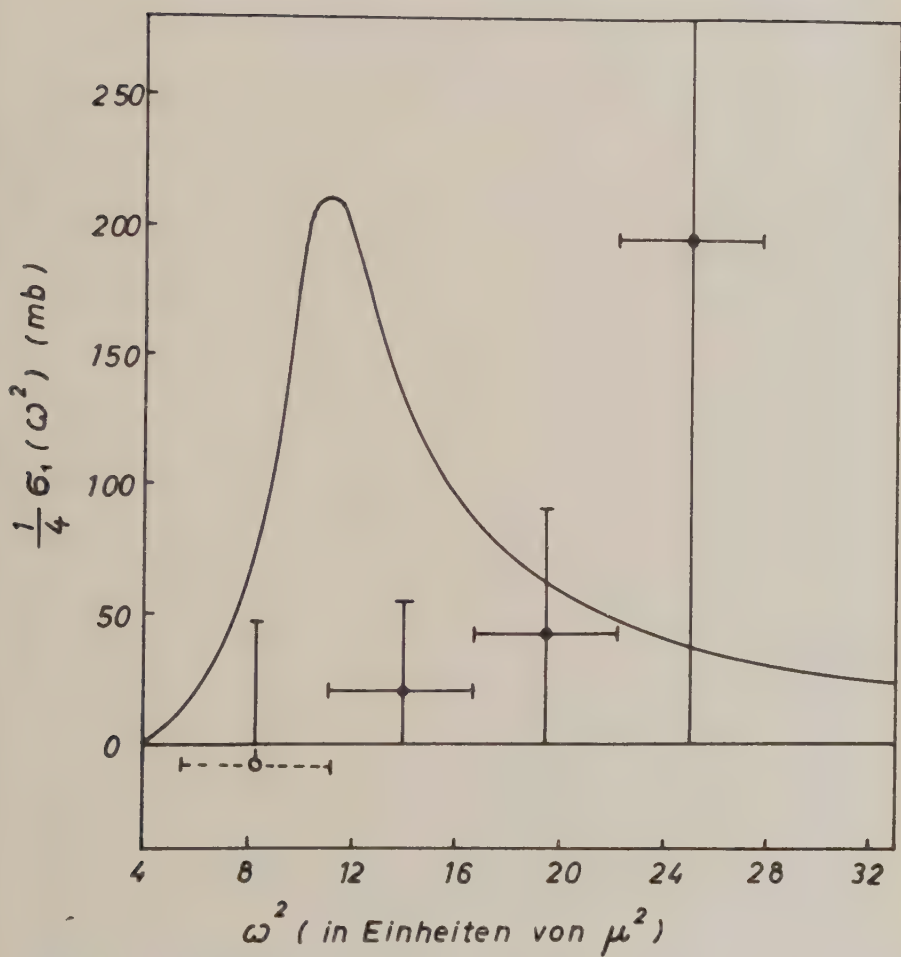


Abb. 29: Vergleich zwischen theoretischer Kurve für $\frac{1}{4} \sigma_1(\omega^2)$ und experimentellen Werten für $\sigma_{\pi^- \pi^0}(\omega^2)$.

In diesem Sinne ist die in der Arbeit³⁶ (Fig.4) von Frazer und Fulco gegebene Kurve für $\frac{1}{4}\sigma_1$ mit $\sigma_{\pi^-\pi^+}$ bezeichnet. Diese Kurve ist hier in Abb.29 wiedergegeben. Mit ihr können die in dieser Arbeit gefundenen Werte von $\sigma_{\pi^-\pi^0}$ direkt verglichen werden. Vernachlässigt man nämlich unter der Vermutung einer starker $T=1$ -Resonanz die Streuung in den Zuständen $T=0,2$, so gilt nach (98b):

$$(100) \quad \sigma_{\pi^-\pi^0} = \frac{1}{4} \sigma_1.$$

In Abb.29 sind die experimentellen Werte für $\sigma_{\pi^-\pi^0}$ aus dieser Arbeit (Tabelle III) eingetragen. Wie man sieht, stimmen die gemessenen Werte nicht mit der theoretischen Kurve überein. Aus dieser Diskrepanz ist mit großer Wahrscheinlichkeit zu schließen, daß es die von Frazer und Fulco vorhergesagte $\pi\pi$ -Resonanz mit $J=1, T=1$ nicht gibt, wenigstens nicht an der von ihnen berechneter Stelle und mit der vorhergesagten Stärke, gegenüber der die Streuung mit $T=0$ und 2 vernachlässigt werden könnte. Die elm.Str. des Nukleons kann daher nicht mit dem Zwei-Pionen-Austausch (Graph (97)) in der Behandlung von Frazer und Fulco allein erklärt werden, und die von Frazer und Fulco gemachten vereinfachenden Annahmen (z.B. Vernachlässigung der Austauschprozesse mit einer größeren Anzahl von Pionen, Verlauf der $\pi\pi$ -Streuamplitude im unphysikalischen Gebiet) sind nicht erlaubt. Es wird jedoch schwierig sein, die Beiträge der komplizierteren Graphen zur elm.Str. des Nukleons zu berechnen. Das wichtige Ergebnis ist also, daß das Zwei-Pionen-System nicht die überwiegende Rolle spielt, die ihm von Frazer und Fulco zugesagt worden ist.

C. Beurteilung der bisher gemachten Näherungen

Bevor das hier beschriebene Experiment durchgeführt wurde, gab es nur eine sehr geringe Anzahl von Ereignissen

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p + \pi^0$$

(ungefähr 100 in³⁹, ungefähr 100 in³¹). Es ist natürlich nicht möglich, mit so wenigen Ereignissen eine Extrapolation durchzuführen, wie sie in dieser Arbeit vorgenommen wurde. Um trotzdem etwas über den $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt sagen zu können, wurde von Bonsignori und Selleri⁴⁰ die auf S.23 ausführlich besprochene Näherungsannahme gemacht, daß auch am Anfang des physikalischen Gebiets in der Nähe des Pols $p^2 = -\mu^2$ nur der Ein-Pion-Austausch wichtig ist und die p^2 -Abhängigkeit durch Formel (35) gegeben ist. Mit dieser Vernachlässigung aller anderen Beiträge wurde dann durch Anpassung

von (35) an das vorliegende, geringe experimentelle Material ein mittlerer Pion-Pion-Wirkungsquerschnitt bestimmt^{40,41}. Daß die gemachte Näherung allerdings erlaubt war, konnte mit den damals vorliegenden wenigen Daten weder begründet noch widerlegt werden. Trotzdem schien es naheliegender, diese Annahmen zu machen, da Frazer und Fulco eine starke $\pi\pi$ -Resonanz vorausgesagt hatten, so daß der Ein-Pion-Pol einen sehr starken Beitrag liefern und der Polterm auch noch im physikalischen Gebiet überwiegen würde.

Ob die in⁴⁰ gemachte Näherung erlaubt ist oder nicht, kann an der aus diesem Experiment vorliegenden umfangreichen Statistik nachgeprüft werden. Im vorigen Abschnitt wurde schon ausgeführt, daß die von Frazer und Fulco vorausgesagte starke Resonanz experimentell nicht gefunden wurde. Es liegt also schon von daher die Vermutung nahe, daß die gemachten Näherungen nicht erlaubt sind, sondern schon am Anfang des physikalischen Gebietes die anderen, auf S.27-29 ausführlich besprochenen Beiträge eine wichtige Rolle spielen. Dieses Ergebnis folgt in konsistenter Weise auch direkt aus dem folgenden:

1. Wäre nur der Ein-Pion-Austausch wichtig, so müßte die Größe $F(p^2, \omega^2)$ durch eine Gerade durch den Nullpunkt beschrieben werden können (S.23). Jedoch ergab es sich (S.55), daß die experimentellen Verteilungen der Abb.22-28 nicht durch eine Gerade, geschweige denn durch eine Gerade durch den Nullpunkt angepaßt werden können, wie die Abbildungen zeigen.
2. Wie auf S.24 ausgeführt wurde, sieht man den Einfluß anderer Beiträge noch deutlicher, wenn man die experimentelle Größe

$$\frac{F(p^2, \omega^2)}{p^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} \frac{(p^2 + 1)^2}{p^2}$$

aufträgt; sie sollte konstant sein, wenn nur der Ein-Pion-Austausch beiträgt. In den Abb.30-33 ist diese experimentelle Verteilung für die vier ω^2 -Intervalle aufgetragen worden. Man sieht sofort, daß die Verteilungen keineswegs konstant sind, sondern stark von p^2 abhängen, auch schon am Anfang des physikalischen Gebiets.

Ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeit ist es also, daß schon am Anfang des physikalischen Gebiets andere Beiträge zur Amplitude für Pion-Erzeugung eine wichtige Rolle spielen und die in⁴⁰ gemachten

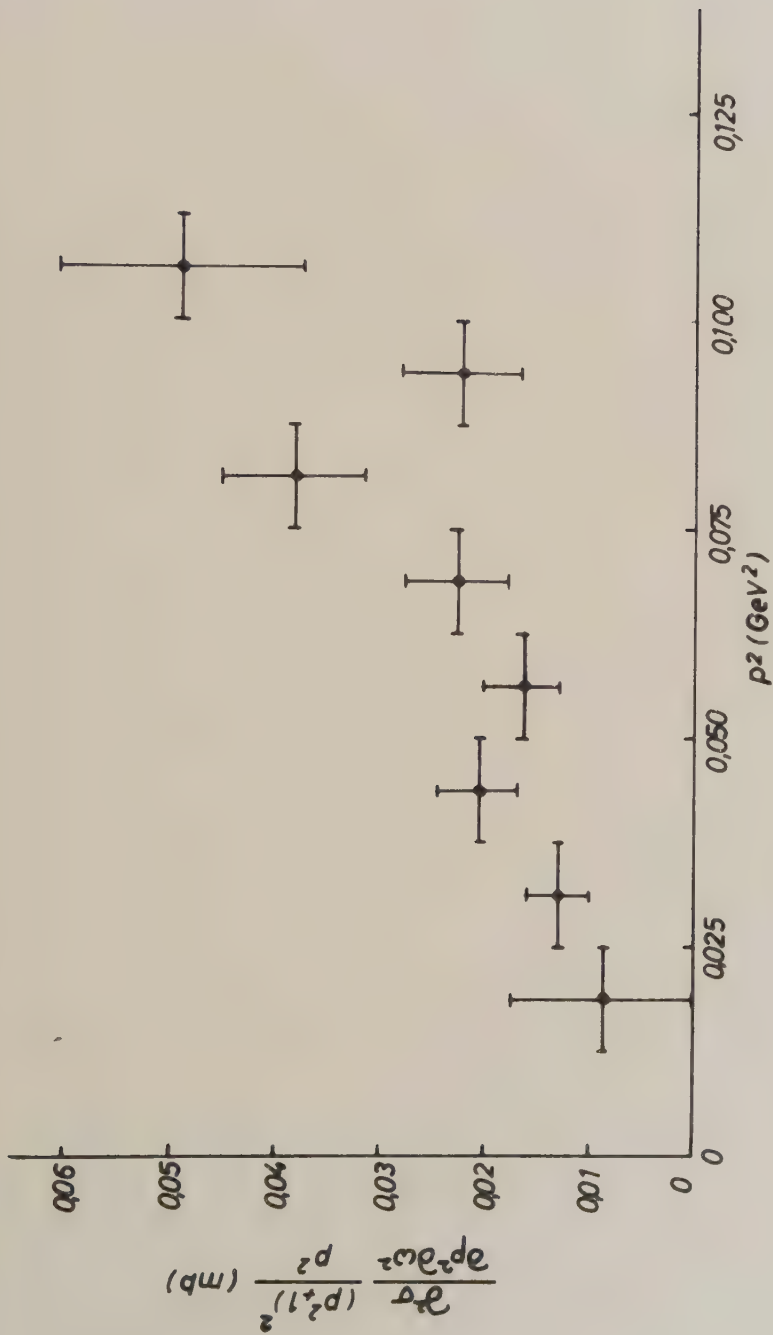


Abb. 30 : $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} \frac{(p^2 + 1)^2}{p^2}$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $5,5 \mu^2$ und $11,1 \mu^2$.

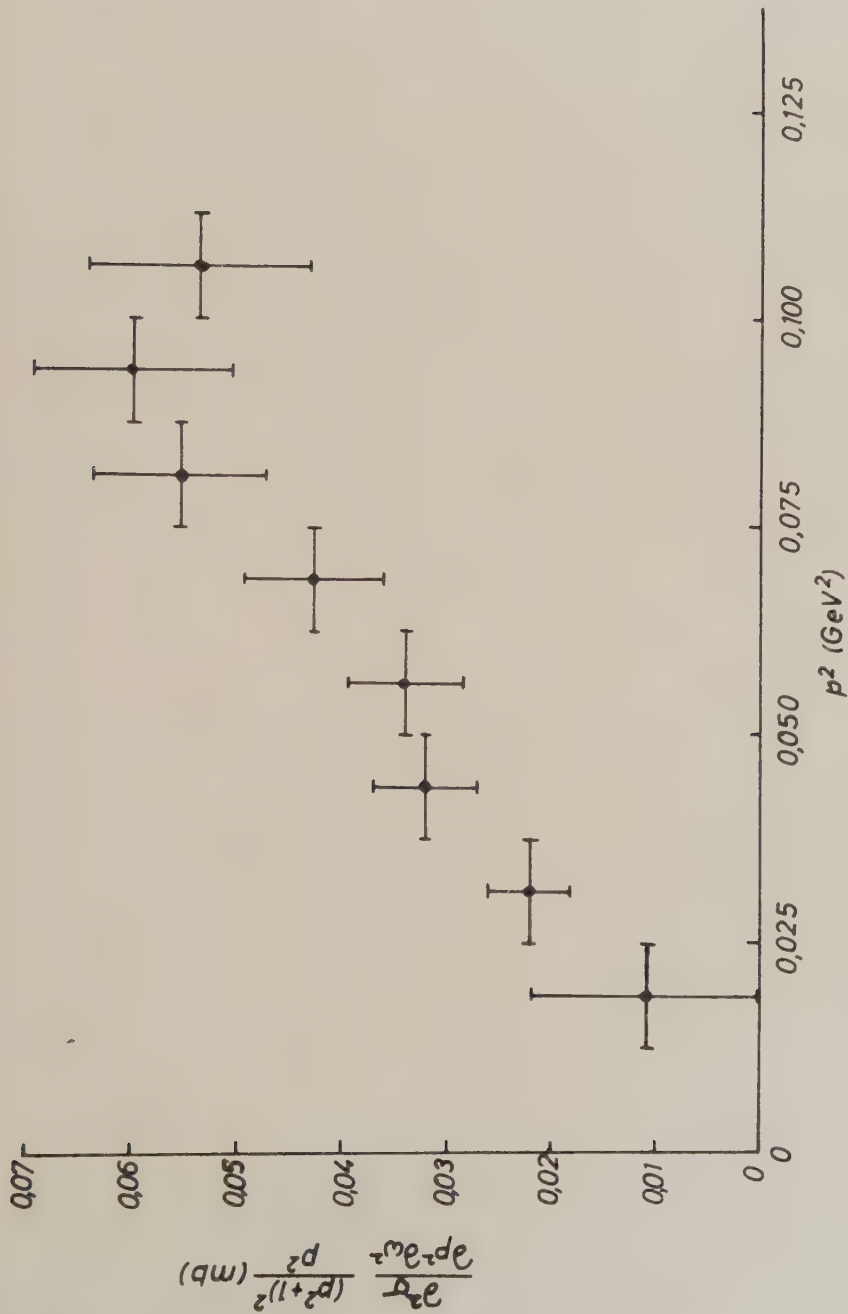


Abb. 31 : $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} \frac{(p^2 + 1)^2}{p^2}$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $14,1 \mu^2$ und $16,7 \mu^2$.

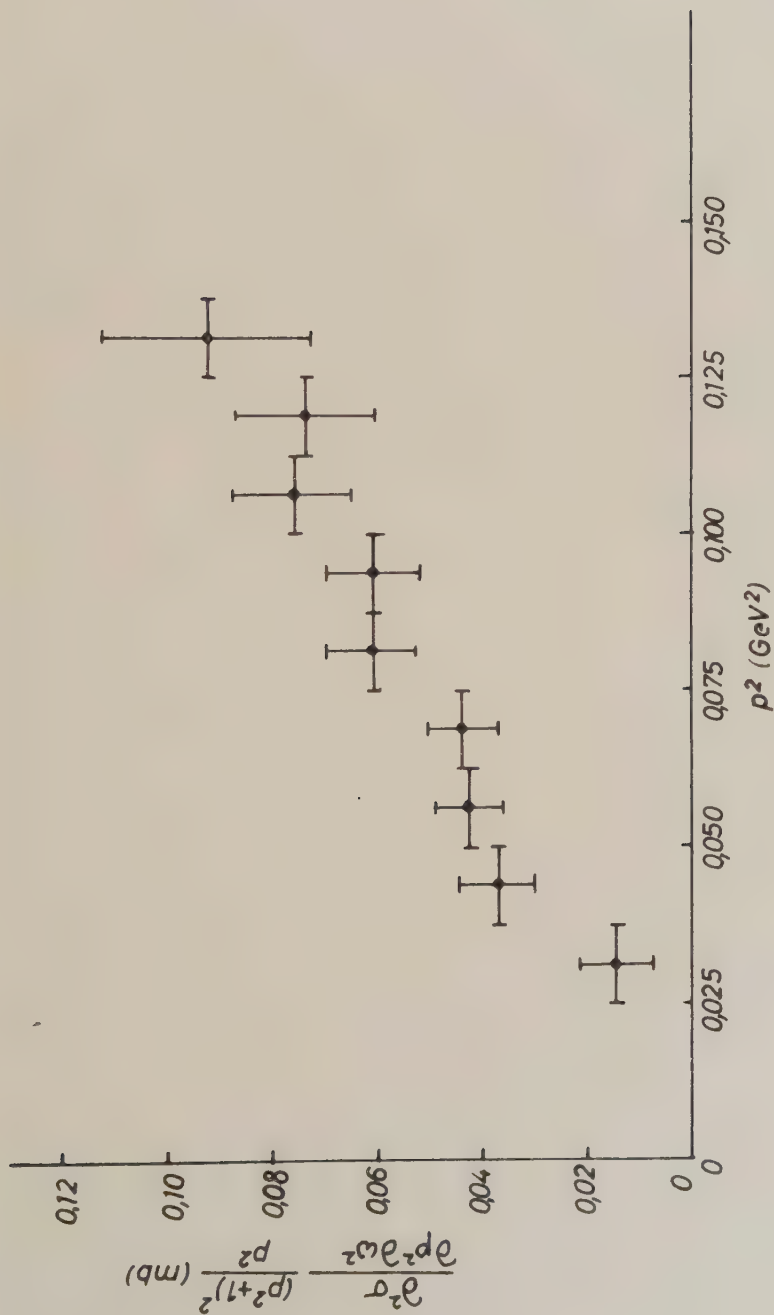


Abb. 32: $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} \frac{d}{(p^2+1)^2}$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $16,7 \mu^2$ und $22, \mu^2$.

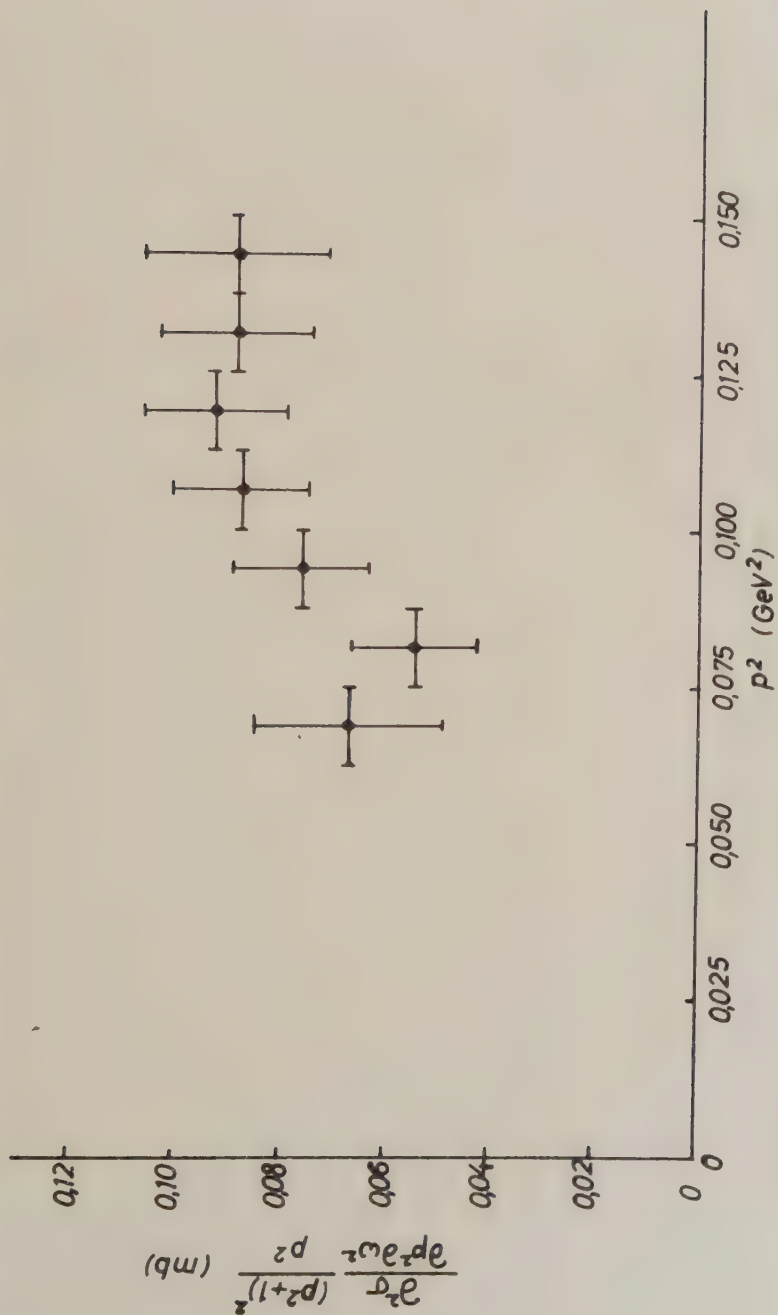


Abb. 33 : $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} \frac{(p^2+1)^2}{p^2}$ als Funktion von p^2 für ω^2 zwischen $22,2 \mu^2$ und $27,8 \mu^2$.

Annahmen nicht erlaubt sind. Auch dieses Ergebnis zeigt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei Pionen nicht so stark ist, wie man ursprünglich angenommen hatte.

D. Diskussion der experimentellen ω^2 -Verteilung

Wenn es die von Frazer und Fulco vorausgesagte starke $\pi\pi$ -Resonanz bei $\omega^2 = 11\mu^2$ gibt, so werden die beiden sekundären Pionen aus der Reaktion



vorzugsweise diese Gesamtenergie ω^2 haben, und eine experimentelle Verteilung in ω^2 sollte an der Stelle $\omega^2 = 11\mu^2$ ein mehr oder weniger scharfes Maximum besitzen. Natürlich sollte eine solche ω^2 -Verteilung nur von Ereignissen mit kleinem p^2 angefertigt werden, bei denen ein Pion-Pion-Stoß in der Wolke mit größerer Wahrscheinlichkeit stattgefunden hat als bei Ereignissen mit großem p^2 (S. 17).

Aus den in Tabelle I zusammengestellten Ergebnissen wurden die beiden, in Abb. 34a und 34b dargestellten ω^2 -Verteilungen angefertigt. Für die erste Verteilung wurden alle Ereignisse mit $p^2 < 0,0875 \text{ GeV}^2$, für die zweite alle Ereignisse mit $p^2 < 0,125 \text{ GeV}^2$ genommen. (Die zweite Verteilung wurde angefertigt, um bei hohem ω^2 noch einen weiteren Punkt zu haben, den es in der ersten Verteilung für kleine p^2 wegen des Phasenraums, Abb. 21, nicht gibt). In den beiden Abbildungen ist allerdings nicht einfach die Zahl der Ereignisse aufgetragen, sondern die Zahl der Ereignisse dividiert durch die Länge des p^2 -Intervalls (von der von ω^2 abhängigen unteren Grenze des Phasenraumes bis zu $p^2 = 0,0875 \text{ GeV}^2$ bzw. $p^2 = 0,125 \text{ GeV}^2$), aus dem die Ereignisse stammen. Durch diese Normierung auf die p^2 -Einheit ist die ω^2 -Abhängigkeit ausgeschaltet, die durch den Phasenraum allein bewirkt wird. (Wie Abb. 21 zeigt, steht z.B. den Ereignissen mit kleinem ω^2 ein viel größerer Anteil des Phasenraums zur Verfügung als denen mit großem ω^2). Nach der Normierung würde die ω^2 -Verteilung konstant sein, wenn die Ereignisse statistisch, d.h. gleichmäßig über den ganzen Phasenraum verteilt lägen. Die normierten Verteilungen der Abb. 34a und 34b sagen also über die Wechselwirkung selbst etwas aus.

Die starke ω^2 -Abhängigkeit der ω^2 -Verteilung zeigt, daß die Pion-Erzeugung keineswegs durch das statistische Modell beschrieben werden kann, sondern die beiden Pionen vorzugsweise mit hoher Gesamtenergie aus der Reaktion hervorgehen. Jedoch zeigen die Ver-

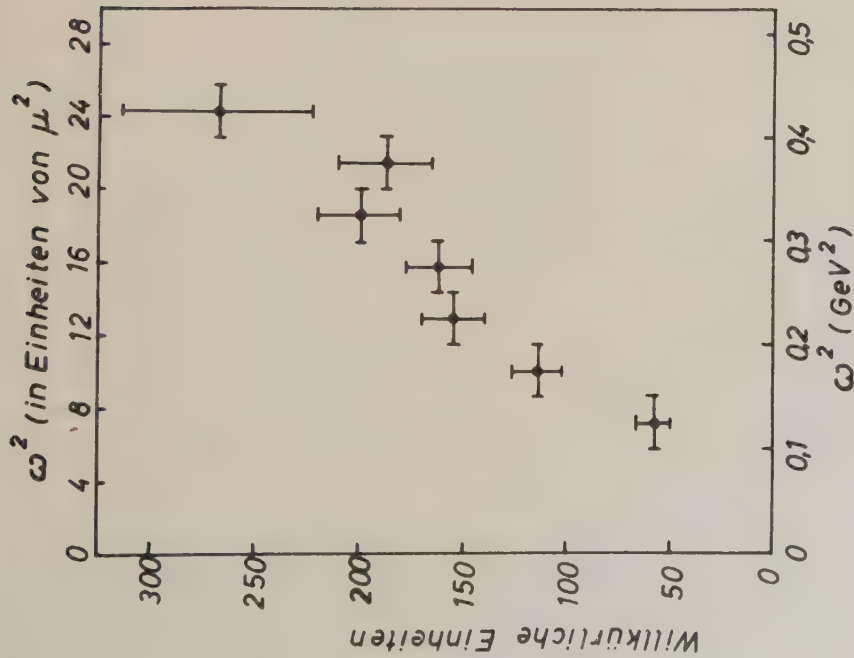


Abb. 31a : ω^2 -Verteilung aus Ereignissen mit $p^2 < 0,0875$ GeV 2 .

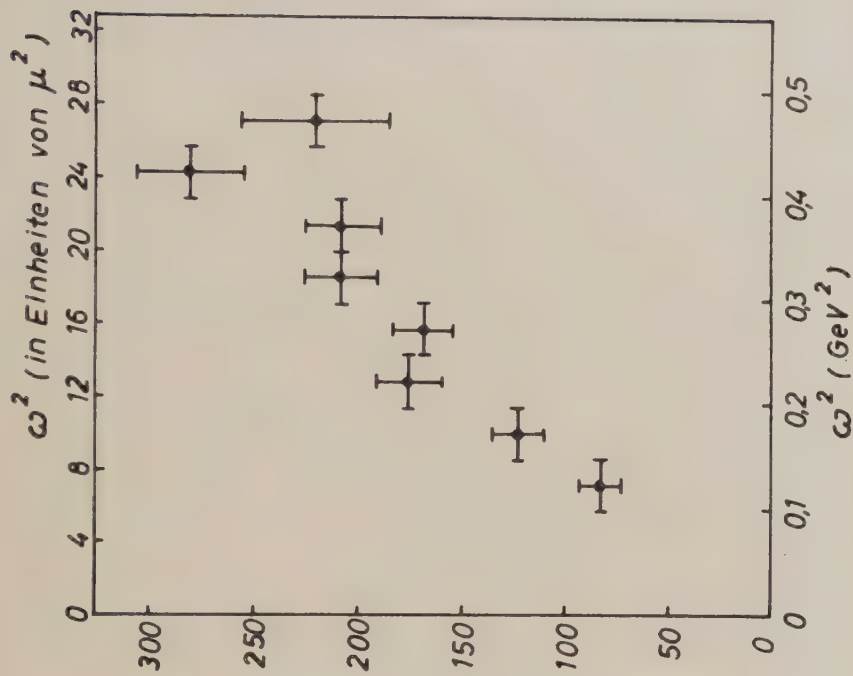


Abb. 31b : ω^2 -Verteilung aus Ereignissen mit $p^2 < 0,1250$ GeV 2 .

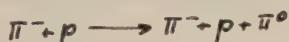
teilungen keineswegs ein ausgeprägtes Maximum bei $\omega^2 \sim 11 \mu^2$. In Übereinstimmung mit den obigen Ergebnissen dieser Arbeit spricht auch dieses Ergebnis stark dafür, daß es die von Frazer und Fulco vorausgesagte $\pi\pi$ -Resonanz nicht gibt. Falls es eine $\pi\pi$ -Resonanz überhaupt gibt, so wird sie bei höherer Energie ω^2 liegen, wie der ansteigende Verlauf der ω^2 -Verteilung zeigt, und wird eine große Breite besitzen. Viel mehr kann über die Lage einer etwaigen Resonanz leider aus diesem Experiment nicht ausgesagt werden, da beim hier benutzten Primärpuls von 1,03 GeV/c ω^2 -Werte über $\sim 0,55 \text{ GeV}^2$ nicht mehr vorkommen. (Um den weiteren Verlauf der ω^2 -Verteilung zu untersuchen, müßte ein Experiment mit größerem Primärpuls durchgeführt werden). Aus bedeutend geringerem experimentellen Material ist von einigen Autoren^{40,41} eine $\pi\pi$ -Resonanz bei etwa $4,5 \mu^2$ inferred worden. Abb. 34b ist damit in Übereinstimmung, falls der letzte Punkt einen wirklichen Abstieg der Kurve nach dem durch den vorletzten Punkt gegebenen Maximum bedeutet. Jedoch soll diese Aussage keineswegs als sicheres Ergebnis angesehen werden aus den folgenden Gründen:

1. Innerhalb der Fehlergrenzen sind auch die beiden letzten Punkte mit einem weiteren Ansteigen der Kurve über das in diesem Experiment zusätzliche ω^2 -Intervall hinaus verträglich, so daß das Maximum bei noch höherem ω^2 liegen würde.
2. Der letzte Punkt ist aus Ereignissen mit relativ großem p^2 zustandegewonnen (Tabelle I), bei denen die $\pi\pi$ -Wechselwirkung in der Wolke nicht mehr eine wichtige Rolle spielt. Sie sollten daher vielleicht nicht mehr als Informationsquelle über die $\pi\pi$ -Wechselwirkung benutzt werden.
3. Ganz allgemein braucht ein Maximum in der ω^2 -Verteilung, wenn es nicht sehr scharf ist, nicht unbedingt eine $\pi\pi$ -Resonanz zu bedeuten.

Zusammenfassung

Am Bevatron in Berkeley wurde (in Zusammenarbeit von mehreren Mitgliedern der Alvarez-Gruppe) ein Strahl negativer π^- -Mesonen von $1,03 \frac{GeV}{c}$ aufgebaut, die in die 72" Wasserstoff-Blasekammer geschossen wurden. Die optischen Eigenschaften der im Strahl benutzten Quadrupollinsen und Ablenk magnete wurden vorher durch Berechnungen nach der Matrix-Methode und durch Messungen nach der Draht-Bahn-Methode bestimmt.

Zur Bestimmung des $\pi^- \pi^0$ -Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\pi^- \pi^0}$ nach einer von Chew und Low angegebenen Extrapolationsmethode wurden die Blasekammerfilme nach Ereignissen



durchsucht, bei denen das Proton in der Kammer zur Ruhe kam. Dadurch war sofort eine Unterscheidung der obigen Reaktion von der elastischen Streuung möglich. Es wurden insgesamt ca. 1100 Ereignisse gefunden. Bei jedem Ereignis wurden an der Spur des auslaufenden Protons auf dem Messtisch Messungen vorgenommen und aus ihnen der Vierer-Impulsübertrag p^2 und die Gesamtenergie ω^2 der beiden auslaufenden Pionen berechnet. Zur Vermeidung eines systematischen Fehlers bei der Auswahl der Ereignisse wurde durch numerische Integrationen über die Verteilung des π^- -Strahls in der Blasekammer ein Korrekturfaktor als Funktion des Protonimpulses und des Protonstreuwinkels berechnet. Aus der Zahl der gefundenen Ereignisse und der insgesamt verfolgten Spurlänge $L = 5,21 \cdot 10^7$ cm wurde die zweidimensionale Verteilung $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2}(p^2, \omega^2)$ angefertigt.

Nach Chew und Low besitzt die Verteilung $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2}$ als Funktion von p^2 einen Pol zweiter Ordnung an der unphysikalischen Stelle $p^2 = -\mu^2$ (μ = Pion-Masse), der durch den Beitrag des Ein-Pion-Austausches (Pion-Erzeugung durch Pion-Pion-Stoß in der Wolke des Nukleons) zur Amplitude für Pion-Erzeugung zustandekommt; das durch eine Extrapolation zu bestimmende Residuum an der Polstelle ist eine Funktion des $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitts. Jedoch tragen zur gesamten Streuamplitude noch andere Erzeugungsprozesse bei, die theoretisch noch nicht verstanden sind. Dadurch wird es problematisch, wie die Extrapolation ins unphysikalische Gebiet praktisch durchzuführen ist. Es wird gezeigt, daß der beste und allge-

meinste Ausdruck, der an die experimentelle Verteilung $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2 + \mu^2)^2$ anzupassen ist, ein Polynom in $p^2 + \mu^2$ ist.

Dieser Ansatz enthält mehrere mögliche Näherungen als Spezialfälle. Die Ordnung des Polynoms ist aus der Anpassung zu bestimmen; dies erfordert eine große Anzahl von Ereignissen.

Die Auswertung der experimentellen Daten führte zu den folgenden Ergebnissen:

1. Die Durchführung der Extrapolation mit dem Polynom-Ansatz ergab, daß ein quadratisches Polynom eine gute Anpassung erlaubt; Polynome von niedrigerer Ordnung scheiden aus. Es wurden die Werte von $\sigma_{\pi\pi}(\omega^2)$ für 4 verschiedene ω^2 -Intervalle zwischen $0,1 \text{ GeV}^2$ und $0,5 \text{ GeV}^2$ bestimmt.
2. Die gefundenen experimenteller Werte für $\sigma_{\pi\pi}$ wurden verglichen mit theoretischen Berechnungen von Frazer und Fulco, die unter gewissen Vernachlässigungen aus der elektromagnetischen Struktur des Nukleons mit Hilfe von Dispersionsrelationen eine starke $\pi\pi$ -Resonanz bei $\omega^2 = 11\mu^2$ im Zustande $J=T=1$ voraussagten. Der Vergleich ergab, daß es diese Resonanz nicht gibt.
3. Um aus einer sehr geringen Anzahl von Ereignissen einen mittleren $\pi\pi$ -Wirkungsquerschnitt zu bestimmen, wurden von Bonsignori und Selleri alle anderen Beiträge zur Amplitude für die Pion-Erzeugung gegenüber dem Ein-Pion-Austausch vernachlässigt. Eine Nachprüfung dieser Annahme anhand der vorliegenden großen Statistik ergab, daß diese Vernachlässigung nicht gerechtfertigt ist, daß vielmehr schon am Anfang des physikalischen Gebiets in der Nähe des Pols $p^2 = -\mu^2$ andere Beiträge eine bedeutende Rolle spielen und der Ein-Pion-Austausch bei weitem nicht so stark überwiegt, wie man ursprünglich vermutet hatte. Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem Ergebnis unter 2.
4. Auch die experimentelle Verteilung in der Gesamtenergie ω^2 der beiden Pionen steht in scharfem Widerspruch zu der von Frazer und Fulco vorausgesagten Resonanz. Die ω^2 -Verteilung schließt eine Resonanz bei einer höheren Energie ω^2 nicht aus; andererseits kann eine solche Resonanz nicht aus der gemessenen ω^2 -Verteilung gefolgert werden.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. W. Heisenberg möchte ich vielmals danken für die freundliche Aufnahme ins Max-Planck-Institut für Physik und für sein Interesse an dieser Arbeit. Mein herzlicher Dank gilt besonders Herrn Dr. K. Gottstein für seine große Anteilnahme, mit der er das Zustandekommen dieser Arbeit verfolgte und unterstützte, und für wertvolle Diskussionen und Hinweise.

Es ist mir eine große Freude, in Berkeley, wo der größte Teil des Experimentes durchgeführt wurde, Herrn Prof. Dr. L. W. Alvarez zu danken für die große Gastfreundschaft, die ich während meines 15-monatigen Aufenthalts am Lawrence Radiation Laboratory erfahren habe, für seine großzügige Hilfsbereitschaft, sein ständiges Interesse am Fortgang der Arbeit und für viele wertvolle Hinweise und Anregungen. Mein herzlicher Dank gebührt auch meinen Freunden Prof. Dr. F. S. Crawford, Mr. J. A. Anderson, Dr. P. J. Burke, Mr. D. D. Carmony in Berkeley, und Herrn Dr. I. Derado in München für ihre große Hilfe und viele fördernden Unterhaltungen. Auch den Durchmusterern der Alvarez-Gruppe bin ich zu großem Dank verpflichtet für ihre Mitarbeit beim Auffinden der Ereignisse.

Schließlich möchte ich dem Max-Planck-Institut für Physik danken für ein Stipendium und dem Bundesministerium für Atomkernenergie und Wasserwirtschaft für die Studienbeihilfe, die mir den Aufenthalt in den USA ermöglichte.

Literaturverzeichnis

1. G.P.Chew, P.E.Low, Phys.Rev. 113,1640,1959.
2. O.Chamberlain, Ann.Rev.Nucl.Sci. 10,161,1960.
3. L.Smith, R.L.Muckstern, Rev.Sci.Instr. 26,220,1955.
4. E.M.McMillan, UCRL 3333,1956 (unveröffentlicht).
5. E.D.Courant, M.S.Livingston, H.S.Snyder, Phys.Rev. 88,1190,1952.
6. P.B.Shull, C.E.MacFarland, M.M.Bretscher, Rev.Sci.Instr. 25,
364,1954.
7. W.C.Elmore, M.W.Garrett, Rev.Sci.Instr. 21,480,1954.
8. I.E.Dayton, P.C.Shookmaker, R.W.Mozley, Rev.Sci.Instr. 25,485,1954.
9. H.A.Engel, Rev.Sci.Instr. 30,248,1959.
10. N.Schmitz, Memorandum 144 der Alvarez-Gruppe, 1960 (unveröffentlicht).
11. W.M.Brobeck, UCRL 3912,1957 (unveröffentlicht).
12. G.K.Green, E.D.Courant, Handb.Phys. 44,218,1959.
13. E.J.Lofgren, Proc.Nat.Acad.Sci. 45,451,1959.
14. C.A.Coombes, B.Cork, W.Galbraith, G.R.Lambertson, W.A.Wenzel,
Phys.Rev. 112,1303,1958.
15. P.Eberhard, M.L.Good, H.K.Ticho, UCRL 8878,1959 (unveröffentlicht).
16. D.A.Glaser, Handb.Phys. 45,314,1958.
17. J.D.Gow, A.H.Rosenfeld, Int.Conf. on High Energy Accel.(1959),
S.435.
18. H.Bradner, Ann.Rev.Nucl.Sci. 10,109,1960.
19. G.P.Chew, UCRL 9028,1960 (unveröffentlicht).
20. T.D.Spearman, Nucl.Phys. 16,402,1960.
21. F.J.Dyson, Advanced Quantum Theory (1951),S.31.
22. T.D.Lee, C.N.Yang, Nuov.Cim. 3,749,1956.
23. N.Schmitz, Memorandum 184 der Alvarez-Gruppe, 1960 (unver-
öffentlicht).
24. G.R.Lynch, Memorandum 135 der Alvarez-Gruppe, 1960 (unver-
öffentlicht).
25. I.Derado, G.Lütjens, N.Schmitz, Ann.d.Phys. 4,103,1959.
26. J.P.Franck, Rev.Sci.Instr., im Druck.
27. A.H.Rosenfeld, Int.Conf. on High Energy Accel.(1959),S.533.
28. W.E.Humphrey, Memorandum 111 der Alvarez-Gruppe, 1959 (unver-
öffentlicht).

29. A.H.Rosenfeld, J.N.Snyder, UCRL 9098, 1960 (unveröffentlicht).
30. R.M.Sternheimer, Phys.Rev. 93, 642, 1954.
31. I.Derado, N.Schmitz, Phys.Rev. 118, 309, 1960.
32. N.Schmitz, Memorandum 211 der Alvarez-Gruppe, 1960 (unveröffentlicht).
33. J.H.Atkinson, B.H.Willis, UCRL 2426 II, 1957, S.73 (unveröffentlicht).
34. H.Cramér, Mathematical Methods of Statistics (1951), S.550.
35. W.R.Frazer, J.R.Fulco, Phys.Rev.Lett. 2, 365, 1959.
36. W.R.Frazer, J.R.Fulco, Phys.Rev. 117, 1609, 1960.
37. G.F.Chew, R.Karplus, S.Masiorowicz, P.Zachariasen, Phys.Rev. 110, 265, 1958.
38. R.Hofstadter, F.Bumiller, M.R.Yearian, Rev.Mod.Phys. 30, 482, 1958.
39. V.Alles-Borelli, S.Bergia, E.Perez-Ferreira, P.Waloschek, Nuov.Cim. 14, 211, 1959.
40. P.Bonsignori, P.Selleri, Nuov.Cim. 15, 465, 1960.
41. I.Derado, Nuov.Cim. 15, 253, 1960.





Abb. 43: Abbildung einer Dampfmaschine (Kesselraum mit Zylinderkopf)



Abb. 44: Abbildung einer Blase (Kesselraum mit Zylinderkopf)

Anhang B: Beschreibung der einzelnen Schritte bei der Durchführung des Experiments (mit Beispielen)

1. Die Durchmusterungsliste

Bei der Durchmusterung der Filme und der Ausmessung eines gefundenen Ereignisses wurde von jedem Ereignis die folgenden Daten in die Durchmusterungsliste eingetragen. (Teil III.B. der Arbeit):

- Nummer RN der Filmrolle,
- Nummer BN des Bildes in der Filmrolle,
- Nummer ZN der Blasenkammerzzone, in der das Ereignis stattfindet,
- Endpunktabstand Δ ,
- projizierte Sehnenlänge s' ,
- Azimuthwinkel φ_s der Sehne,
- Abstand Δ_f der Orientierungsmarken.

Aus diesen unmittelbaren Meßwerten wurden dann mit Hilfe von Nomogrammen (Abb.16) die folgenden Größen für das Ereignis bestimmt und ebenfalls in die Durchmusterungsliste eingetragen:

- Neigungswinkel λ ,
- projizierte Sehnenlänge $s_\perp$ in der Blasenkammer,
- Protonimpuls p_p ,
- Winkeldifferenz $\Delta\varphi$ und Winkel φ ,
- Protonstreuwinkel θ_p .

In Abb.B1 ist eine Durchmusterungsliste schematisch dargestellt, 2 wirkliche Ereignisse sind als Beispiele eingetragen.

RN	BN	ZN	Δ	s'	Δ_f	$\varphi_s \pm \Delta\varphi$	φ	λ	$s_\perp$	p_p (MeV/c)	θ_p
533	482	5	0.57	7.4	1.5	12-13	1	18	12.0	369	18
533	515	7	0.495	2.2	1.3	14-7	7	44	3.9	281	45

Abb.B1: Durchmusterungsliste (Längen in Zoll, Winkel in Grad)

2. Die Hauptliste

Die ein Ereignis kennzeichnenden Daten RN, BN, p_p , θ_p wurden für jedes Ereignis von der Durchmusterungsliste auf die Hauptliste übertragen. In diese Hauptliste wurden außerdem für jedes Er-

ereignis die Größen

a) Viererimpuls-Übertrag p^2 ,

b) Gesamtenergie ω^2 der beiden Pionen,

c) Korrekturfaktor K

eingetragen (p^2 wurde von einer Kurve $p^2(p_p)$ (Formel (19)), $\omega^2(p_p, \theta_p)$ von einem Diagramm " θ_p als Funktion von p_p mit ω^2 als Parameter" (Formel (20)) und $K(p_p, \theta_p)$ von einem Diagramm "K als Funktion von p_p mit θ_p als Parameter" (Teil III.C. der Arbeit) abgelesen).

In Abb.B2 ist eine Hauptliste schematisch dargestellt; die beiden Ereignisse der Abb.B1 sind als Beispiele eingetragen

RN	BN	p_p (MeV/c)	θ_p (rad)	p^2 (eV^2)	ω^2 (eV^2)	K
533	482	369	18	0.131	0.46	1.60
533	515	281	45	0.07 ^a	0.27	1.14

Abb.B2: Hauptliste

- Von den Hauptliste: wurde jedes Ereignis durch seinen Korrekturfaktor in die zu (p^2, ω^2) gehörige Zelle des in Zellen aufgeteilten physikalischen (p^2, ω^2)-gebietes eingetragen. Durch Summation der Korrekturfaktoren in jeder Zelle wurde hieraus die Tabelle I gewonnen (Teil III.E. dieser Arbeit). Für jede Zelle wurde die phasenraumnormierte Anzahl $\Delta^2 N^u$ der Ereignisse nach Formel (77) bestimmt.
- Um aus den Daten der Tabelle I die in den Abb.22-26 und in den Tabellen II und III dargestellten Ergebnisse mit Hilfe der Rechenmaschine IBM-704 zu erhalten, wurde für jedes ω^2 -Intervall ein Satz von IBM-Lochkarten hergestellt, und zwar eine Lochkarte pro p^2 -Intervall. Auf jeder Lochkarte wurden die drei Größen
 - $p^2_v = p^2$ -Wert des v -ten p^2 -Intervalls (in Einheiten von μ^2),
 - $\Delta^2 N^u_v =$ korrigierte Anzahl der Ereignisse in diesem Intervall,
 - $\bar{N}_v =$ unkorrigierte Anzahl der Ereignisse in diesem Intervall
 eingedruckt. Jeder zu einem bestimmten ω^2 -Intervall gehörige Satz von Lochkarten wurde abgeschlossen durch eine zusätzliche Karte, auf der die folgenden 3 Größen eingedruckt waren:
 - ω^2 (in Einheiten von μ^2),
 - $q_{1L}^2 = 58,2 =$ Quadrat des Primärimpulses (in Einheiten von μ^2) (q_{1L}^2 geht in Formel (16) ein.),

c) Konstante $C = \frac{1}{\pi L} \frac{1}{\Delta p^2 \Delta \omega^2}$ (S.50,51; diese Konstante wird zur Berechnung von $\frac{\Delta^2 \sigma}{\Delta p^2 \Delta \omega^2}$ (in mb) aus $\Delta^2 M^4$ benutzt, Formel (7^a)).

Abb.B3 zeigt als Beispiel Teile des Lochkartensatzes für das Intervall $5,5 \mu^2 < \omega^2 < 11,1 \mu^2$, mit dem die Abb.22 und die erste Spalte der Tabellen II und III erhalten werden (siehe auch Tabelle I).

	1,03	14,11	14,0
	⋮		
	5,84	30,26	18,0
zusätzliche Karte:	8,32	58,2	0,000157

Abb.B3: Lochkartensatz

- 5.- Die Lochkarten wurden neben den Programm-Lochkarten in die Rechenmaschine IBM-704 gegeben. Von der Maschine wurden für jedes angepaßte Polynom (S.54) die folgenden Ergebnisse ausgedruckt:
- Anzahl j der experimentellen Punkte,
 - Ordnung k des angepaßten Polynoms,
 - Wirkungsquerschnitt σ_{T-P} (in mb),
 - Fehler $\Delta \sigma_{T-P}$ im Wirkungsquerschnitt (in mb),
- } (Formel (35), (4))

- e) χ^2 (Formel (82)),
- f) angepasste Koeffizienten A_μ (in mb) (Formel (89)),
- g) Fehler ΔA_μ in den angepassten Koeffizienten (in mb) (Formel (95)),
- h) experimentelle Werte für $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2 \partial \omega^2} (p^2 + 1)^2$ für alle p^2 -Intervalle, (Formel (78)),
- i) statistische Fehler in den experimentellen Werten,
- j) Wert der angepassten Kurve an den Stellen p_v^2 .

Mit Hilfe dieser Ergebnisse wurden die Abb. 22-24 und die Tabellen II und III erhalten.

Lebenslauf

Am 13. Okt. 1933 wurde ich als Sohn des jetzigen Gemeindedirektors Theo Schmitz und seiner Gattin Margarete, geb. Clemens, in Schiefbahn geboren. Im Frühjahr 1940 trat ich in die Volksschule von Schiefbahn ein und legte am 3.3.1953 am humanistischen Arndt-Gymnasium in Krefeld meine Reifeprüfung ab. Seit 1953 studierte ich an der Universität Göttingen Physik und legte am 27.7.1955 mein Diplomvorexamen mit der Note "Ausgezeichnet" ab. Von 1955 bis 1958 war ich Mitglied der Studienstiftung des deutschen Volkes. Am 3.3.1958 bestand ich an der Universität Göttingen die Diplomprüfung mit der Note "Sehr gut". Meine Diplomarbeit wurde am Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, unter Prof. Dr. K. Wirtz angefertigt und hat zum Thema "Die elastische und inelastische Streuung von positiven K-Mesonen an zusammengesetzten Kernen bei niedrigen Energien (20-60 MeV)". Nach meiner Diplomprüfung arbeitete ich am Max-Planck-Institut für Physik, das nach München übersiedelte, an der Auswertung von Blasenkammerfilmen zur π -Meson-Proton-Streuung. Die Zeit von Sept. 1959 bis Dez. 1960 verbrachte ich am Lawrence Radiation Laboratory in Berkeley, USA, in der Gruppe von Prof. Dr. L. W. Alvarez. Dort wurde das für diese Arbeit benutzte experimentelle Material angesammelt.

